TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2017.

Zadatak 1. *(13 bodova)*

(a) Što je to karakteristična funkcija funkcije distribucije F (ili sl. var. X definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$)?

(b) Iskažite i dokažite teorem inverzije.

(c) Pokažite da je sl. var. simetrična ako, i samo ako, je pripadna karakteristična funkcija realna.

Sve svoje tvrdnje dokažite ili argumentirajte kontraprimjerima. Pomoćne rezultate jasno iskažite ili obrazložite, ali ih ne trebate dokazivati.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2017.

Zadatak 2. *(12 bodova)*

(a) Neka je φ karakteristična funkcija neke slučajne varijable. Pokažite da je realni dio te funkcije $Re(\varphi)$ također karakteristična funkcija neke slučajne varijable. Odredite njeno očekivanje.

(b) Postoje li konstante $A, B \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija

(b1) $\varphi_1(t) = Ae^{i|t|}$, $t \in \mathbb{R}$

(b2) $\varphi_2(t) = A(1-it)^{-4}\cos t + Bt\cos t$, $t \in \mathbb{R}$

karakteristična funkcija neke slučajne varijable? Ukoliko postoje, odredite ih te odredite očekivanje (ukoliko postoji) pripadne slučajne varijable.

Rješenje.

(a) Neka je X pripadna slučajna varrijabla karakteristične funkcije φ. Uočimo $Re(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi(-t) = \frac{1}{2}\varphi_X(t) + \frac{1}{2}\varphi_{-X}(t)$. Uočimo da je $Re(\varphi)$ konveksna kombinacija karakterističnih funkcija φ_X i φ_{-X}, pa je Bochnerovom kriteriju i sama karakteristična funkcija. Kako je $Re(\varphi)$ realna, sijedi da je pripadna slučajna varijabla simetrična, što znači da joj je očekivanje jednako 0.

(b) Uočimo da je $\varphi_1(-t) = \varphi_1(t)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$, a da φ_1 nije realna funkcija. Iz nužnih uvjeta za karakterističnu funkciju slijedi da φ_1 nije karakteristična funkcija niti za jedan $A \in \mathbb{R}$.

Da bi φ_2 bila karakteristična funkcija, nužno je

$$1 = \varphi_2(0) = A.$$

Također nužno je

$$|Bt\cos t| \le |\varphi_2(t)| \le 1,$$

za sve $t \in \mathbb{R}$, a to vrijedi jedino za $B = 0$ (za $B \neq 0$ uzmemo $t = \left(\left\lfloor \frac{1}{|B|} \right\rfloor + 1\right)\pi$, pa vidimo da tražena nejednakost ne vrijedi). Uočimo da je φ_2 karakteristična funkcija slučajne varijable $X+Y$, gdje su $X \sim \Gamma(4,1)$ i $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ nezavisne slučajne varijable. Sada je $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 4+0 = 0$ ili $\mathbb{E}[X+Y] = \frac{\varphi_2'(0)}{i} = ... = 4$ (jer je $\varphi_2''(0) < \infty$).

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2017.

Zadatak 3. *(13 bodova)*

(a) Što to znači da niz (generaliziranih) funkcija distribucije $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ slabo konvergira prema (generaliziranoj) funkciji distribucije F? Što to znači da niz konačnih mjera $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na $\mathcal{B}$ slabo konvergira prema konačnoj mjeri μ?

(b) Iskažite i dokažite teorem Prohorova.

(c) Pokažite da napet niz vjerojatnosnih mjera $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na $\mathcal{B}$ slabo konvergira prema vjerojatnosnoj mjeri μ ako, i samo ako, $\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mu_n}(t)$ postoji za sve $t\in\mathbb{R}$. Ovdje φ_{μ_n} označava karakterističnu funkciju od μ_n.

Sve svoje tvrdnje dokažite ili argumentirajte kontraprimjerima. Pomoćne rezultate jasno iskažite ili obrazložite, ali ih ne trebate dokazivati.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2017.

Zadatak 4. *(12 bodova)* Neka je $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $U_n \sim U(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

(a) Provjerite konvergira li niz $(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n kU_k)_{n\in\mathbb{N}}$ po distribuciji. Ako da, odredite graničnu razdiobu.

(b) Provjerite zadovoljava li niz $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ centralni granični teorem.

Rješenje.

(a) Uočimo da je $kU_k \sim U(-1,1)$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli (npr. pokažemo da je $\varphi_{kU_k}(t) = \frac{sint}{t}$). Po Lévyjevom centralnom graničnom teoremu slijedi da

$$\frac{\sum_{k=1}^n kU_k - n\mathbb{E}[U_1]}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}(U_1)}} = \frac{\sum_{k=1}^n kU_k}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{3}}} \to N(0,1),$$

odnosno

$$\frac{\sum_{k=1}^n kU_k}{\sqrt{n}} \to N\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

(b) Neka je $S_n := U_1 + \cdots + U_n$ i $s_n^2 := \mathrm{Var}(S_n)$. Uočimo da slučajne varijable U_n nisu jednako distribuirane, stoga provjeravamo Ljapunovljev uvjet za CGT. Vrijedi

$$\mathbb{E}[U_n] = 0,\ \mathrm{Var}(U_n) = \mathbb{E}[U_n^2] = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2 \frac{n}{2} dx = \frac{1}{3n^2} \text{ i } s_n = \sqrt{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}.$$

Nadalje, za $\delta > 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}[|U_n|^{2+\delta}] = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |x|^{2+\delta}\frac{n}{2}dx = \sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} x^{2+\delta}dx = \frac{1}{(3+\delta)n^{2+\delta}}.$$

Slijedi

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|U_k|^{2+\delta}] = \frac{3^{1+\delta/2}}{3+\delta} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n k^{-2-\delta}}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)^{1+\delta/2}} \xrightarrow{n\to\infty} c > 0,$$

pa niz ne zadovoljava Ljapunovljev uvjet.
Napomena: Pokaže se da niz ne zadovoljava ni Lindebergov uvjet, stoga ne možemo zaključiti ništa o konvergenciji niza $\left(\frac{S_n}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ po distribuciji. Puni broj bodova nosi provjeravanje Ljapunovljevog uvjeta ili bilo koje rješenje u tom smjeru.