TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Prvi kolokvij – 2. svibnja 2017.

Zadatak 1. *(13 bodova)* Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Što to znači da su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne? Koje karakterizacije nezavisnosti od $X_1, \ldots, X_n$ znate?

(b) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i imaju, redom, gustoće $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, što možete reći o gustoći slučajnog vektora $X = (X_1, \ldots, X_n)$? U slučaju da $X_1, \ldots, X_n$ nisu nezavisne (i imaju gustoće $f_1(x), \ldots, f_n(x)$) što onda možemo reći o gustoći od X?

(c) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i integrabilne, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i].$$

Vrijedi li obrat prethodne tvrdnje?

Sve svoje tvrdnje dokažite ili argumentirajte kontraprimjerima. Pomoćne rezultate jasno iskažite ili obrazložite, ali ih ne trebate dokazivati.

Rješenje.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Prvi kolokvij – 2. svibnja 2017.

Zadatak 2. *(12 bodova)* Neka su X i Y nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable sa standardnom normalnom razdiobom.

(a) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora $(X+Y, X-Y)$. Jesu li $X+Y$ i $X-Y$ nezavisne slučajne varijable?

(b) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Z = |X-Y|$. Jesu li slučajne varijable Z i $X+Y$ nezavisne?

Rješenje.

(a) Označimo $(U, V) = (X+Y, X-Y)$, $g(x, y) = (x+y, x-y)$ i $L = \mathbb{R}^2$. Funkcija g je bijekcija na $T := g(L) = \mathbb{R}^2$, $g^{-1}(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$, $g^{-1} \in C^1(T)$ i $Dg^{-1} = \frac{1}{2}$. Slijedi

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{4\pi} e^{\frac{-u^2-v^2}{4}}, \ u, v \in \mathbb{R}.$$

Kako su $U, V \sim N(0, \sqrt{2})$ slijedi $f_{U,V}(u, v) = f_U(u) f_V(v)$, odnosno da su U i V nezavisne .

(b) Za $z > 0$ vrijedi

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(-z \le V \le z) = F_V(z) - F_V(-z)$$

pa je

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = f_V(z) + f_V(-z) = 2 f_V(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}, \ z > 0.$$

Kako su $X+Y$ i $X-Y$ nezavisne, slijedi da su nezavisne i slučajne varijable $X+Y$ i $h(X-Y)$, gdje je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna Borelova funkcija. Slijedi da su $X+Y$ i Z nezavisne.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Prvi kolokvij – 2. svibnja 2017.

Zadatak 3. *(13 bodova)*

(a) Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Što je to repna σ-algebra niza $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Što je to repna funkcija obzirom na niz $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Navedite primjer jednog repnog događaja i jednog događaja koji nije repni. Navedite primjer jedne repne funkcije i jedne funkcije koja nije repna.

(b) Iskažite i dokažite Kolmogorovljev zakon $0-1$.

(c) Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih sučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Koristeći Kolmogorovljev zakon $0-1$ pokažite da niz $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira g.s. prema konačnom limesu ili divergira g.s.

Rješenje.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Prvi kolokvij – 2. svibnja 2017.

Zadatak 4. *(12 bodova)* Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Neka su α, β, a, b pozitivne realne konstante t.d. $\beta < 2\alpha$ i

$$\mathbb{E}[S_n] = an^\alpha \text{ i } \mathrm{Var}(X_n) \leq bn^{\beta-1}.$$

Pokažite da niz $(\frac{S_n}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po vjerojatnosti. Odredite limes.

(b) Neka je $X_n \geq 0$ g.s. i $\mathbb{E}[X_n] =\mathrm{Var}(X_n) = \lambda_n > 0$ te neka je $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = +\infty$. Dokažite da

$$\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Vrijedi li konvergencija (g.s.)? Svoju tvrdnju obrazložite.

Rješenje.

(a) Za $C = 1 \vee \frac{1}{\beta}$ vrijedi da je

$$\frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) \leq \frac{b}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^n k^{\beta-1} \leq \frac{Cbn^\beta}{n^{2\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

pa slijedi $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Kako je

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] \xrightarrow{n\to\infty} a,$$

pa prema tome

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}} a.$$

(b) Definiramo niz $b_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathbb{E}[S_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Niz (b_n) je pozitivan, rastući i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Vrijedi

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{b_n} \to 0,$$

pa prema tome

$$\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\mathbb{E}[S_n]} + 1 \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Vrijedi i konvergencija gotovo sigurno. Naime, ako niz konvergira po vjerojatnosti, onda postoji rastući podniz k_n t.d. $\frac{S_{k_n}}{\mathbb{E}[S_{k_n}]} \xrightarrow{g.s.} 1$. Za $n \in \mathbb{N}$ t.d. $k_n \leq n < k_{n+1}$ vrijedi

$$\frac{S_{k_n}}{\mathbb{E}[S_{k_{n+1}}]} \leq \frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{\mathbb{E}[S_{k_n}]}.$$

Tvrdnja sada slijedi primjenom teorema o sendviču i činjenice da $\frac{\mathbb{E}[S_{k_n}]}{\mathbb{E}[S_{k_{n+1}}]} \to 1$.