MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij - 15. lipnja 2016.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30
- Završni kolokvij: petak 24.06. u 9h

Zadatak 1.

(a) Iskažite i dokažite teorem jedinstvenosti za karakteristične funkcije.

(b) Neka je F funkcija distribucije s pripadnom karakterističnom funkcijom φ. Koji je dovoljan uvjet na funkciju φ da bi F imala gustoću f. Prikažite (uz dokaz) izraz za f pomoću funkcije φ.

[9 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij - 15. lipnja 2016.

Zadatak 2. Iskažite i dokažite teorem neprekidnosti. Prije toga iskažite i dokažite lemu koja se koristi u dokazu tog teorema. [7 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij - 15. lipnja 2016.

Zadatak 3.

(a) Odredite karakterističnu funkciju geometrijske razdiobe $G(p)$, $p \in (0,1)$.

(b) Neka je $0 < \lambda < N$ za neki $N \in \mathbb{N}$ i $X_n \sim G(\frac{\lambda}{n})$, $n \geq N$. Dokažite da niz $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \geq N}$ konvergira po distribuciji i odredite razdiobu granične slučajne varijable.

Napomena: $X \sim G(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \in \mathbb{N}$.

[7 bodova]

Rješenje:

(a) $\varphi_{X_n}(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it} \sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} e^{itk}(1-p)^k = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

(b) Vrijedi $\varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{i\frac{t}{n}}}$. Kako je

$$\frac{\frac{\lambda}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{i\frac{t}{n}}} = \frac{\lambda e^{i\frac{t}{n}}}{n-(n-\lambda)e^{i\frac{t}{n}}} = \frac{\lambda e^{i\frac{t}{n}}}{t\frac{1-\cos\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} + \lambda\cos\left(\frac{t}{n}\right) - it\frac{sin\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} + i\lambda\sin\left(\frac{t}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

slijedi da je $\lim n \to \infty \varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \varphi_{Exp(\lambda)}(t)$, pa po teoremu neprekidnosti i jedinstvenosti slijedi $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{D} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij - 15. lipnja 2016.

Zadatak 4. Za $p \in (0,1)$ odredite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0\le k\le np} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

[7 bodova]

Rješenje: Za $X_n \sim B(n,p)$ vrijedi

$$\sum_{0\le k\le np} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{0\le k\le np} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \le np).$$

Neka je $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz njd Bernoullijevih slučajnih varijabli, $Y_1 \sim B(p)$. Iz Lévyjevog CGT-a slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \le np) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + .. + Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$