

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni kolokvij - 13. lipnja 2011.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 40
- Rezultati i upis ocjena: petak 17.06. u 12h (šifra:)

Zadatak 1. Iskažite i dokažite teorem o dva reda.

[16 bodova]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni kolokvij - 13. lipnja 2011.

Zadatak 2. Neka je (X_n) niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ako je $\mathbb{E}[X_1] = 0$ pokažite da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{X_1}(t/n))^n = 1.$$

Vrijedi li i obrat te tvrdnje?

[6 bodova]

Rješenje: Po Hinčinovom teoremu $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{E}[X_1] = 0$ ($\mathbb{P}$).

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ (D), po teoremu neprekidnosti $\varphi_{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}(t) \rightarrow \varphi_0(t) = 1$.

Iz $\varphi_{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}(t) = [\varphi_{X_1}(\frac{t}{n})]^n$ slijedi tvrdnja zadatka.

Obrat ne vrijedi. Pretp. da obrat vrijedi, tada

$$[\varphi_{X_1}(\frac{t}{n})]^n \rightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \text{ } (\mathbb{P}) \Rightarrow \mathbb{E}[X_1] = 0$$

pa po Kolmogorovljevom teoremu $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ (*g.s.*), tj (SZVB) povlači (JZVB), kontradikcija.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni kolokvij - 13. lipnja 2011.

Zadatak 3. Ako je $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ odredite treći moment slučajne varijable X . [4 boda]

Rješenje: $\mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{i^3} \varphi^{(3)}(0) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta^3$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni kolokvij - 13. lipnja 2011.

Zadatak 4.

- (a) Iskažite i dokažite Lévyjev centralni granični teorem.
- (b) Iskažite Lindebergov centralni granični teorem i dokažite da je Lévyjev teorem posljedica Lindebergovog teorema!

[12 bodova]