MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij - 01. travnja 2011.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30
- Rezultati: srijeda 06.04. od 13h (šifra:)

Zadatak 1. Neka su $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mathbb{P}_j)_{(j\in\mathbb{N})}$ vjerojatnosni prostori. Kako se definira produkt tih prebrojivo mnogo vjerojatnosnih prostora? Iskažite i dokažite odgovarajući teorem. [8 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij - 01. travnja 2011.

Zadatak 2. Neka su $X_1, .., X_n$ nezavisne slučajne varijable i neka je $X_i \sim U(0, \pi)$ za svaki $i = 1, .., n$.

(a) Pokažite da je slučajna varijabla $Y = \max\{X_1, .., X_n\}$ neprekidna. [2 boda]

(b) Odredite gustoću slučajne varijable $Z = \sin Y$. [5 bodova]

Rješenje

(a) $F_Y(y) = \mathbb{P}(X_1 \le y, .., X_n \le y) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \le y) = \frac{y^n}{\pi^n}$
$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{n}{\pi^n} y^{n-1} 1_{[0,\pi]}(y)$

(b) $g(x) = \sin(x)$, $L = [0, \pi] = [0, \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2, \pi]$, $g_1 = g_{|L_1}$, $g_2 = g_{|L_2}$
Funkcije g_1 i g_2 zadovoljavaju uvjete Teorema 11.8 + Napomena nakon teorema

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_Y(g_1^{-1}(z)) \cdot |\frac{d}{dz} g_1^{-1}(z)| 1_{g_1(L_1)}(z) + f_Y(g_2^{-1}(z)) \cdot |\frac{d}{dz} g_2^{-1}(z)| 1_{g_2(L_2)}(z) = \\ &= \frac{n}{\pi^n \sqrt{1-z^2}} \left((\arcsin z)^n + (\arcsin z + \pi)^n \right) 1_{<0,1>}(z). \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij - 01. travnja 2011.

Zadatak 3. Neka su $X \sim Exp(\lambda)$ i $Y \sim U(-a, a)$ $(\lambda, a > 0)$ nezavisne slučajne varijable. Jesu li slučajne varijable X i $\frac{X}{Y}$ također nezavisne? Dokažite svoju tvrdnju. [7 bodova]

Rješenje

1. način: pokazati da za neke skupove $A, B \in \mathcal{B}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in A, \frac{X}{Y} \in B) \neq \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(\frac{X}{Y} \in B).$$

2. način: odrediti $f_{(X,\frac{X}{Y})}$ po Teoremu 11.9 (slično kao u zad 2) i pokazati $f_{(X,\frac{X}{Y})}(x, y) \neq f_X(x) f_{\frac{X}{Y}}(y)$.

$$f_{(X,\frac{X}{Y})}(x, y) = \frac{\lambda x}{2ay^2} e^{-\lambda x} 1_{<0,\infty>}(x) 1_{<\frac{-x}{a},\frac{x}{a}>}(y).$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij - 01. travnja 2011.

Zadatak 4. Iskažite i dokažite Kolmogorovljev zakon nula-jedan. Prije toga definirajte što je to repna σ-algebra i repna funkcija. [8 bodova]