TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 20. veljače 2017.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Iskažite i dokažite teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete pod kojima je Borelova funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gustoća vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable.

(b) Neka je F proizvoljna neprekidna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ s pripadnom vjerojatnosnom funkcijom gustoće f. Pod kojim uvjetima na parametre $a, b \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} af(x)F^b(x), & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases}$$

vjerojatnosna funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable?

(c) Neka su F i f funkcije iz (b) i Φ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe. Uz koje uvjete na F i konstante $a, b > 0$ je funkcija

$$G(x) = \begin{cases} a\Phi(x), & x < 0 \\ a\Phi(x) + bF(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

funkcija distribucije neke neprekidne slučajne varijable? Odredite joj i gustoću.

Rješenje.

(a) N.Sarapa, Propozicija 9.5

(b) Neka je X slučajna varijabla s distribucijom F. Vrijedi $F(X) \sim U(0,1)$ $(*)$. Uočimo da je funkcija g Borelova (kao produkt Borelovih funkcija). Provjerimo nužne i dovoljne uvjete iz (a).

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)F^b(x)dx = a\mathbb{E}\left[F^b(X)\right] \stackrel{*}{=} a\int_0^1 x^b dx = a\frac{1}{b+1},$$

Uočimo da je gornja jednakost zadovoljena akko $b > -1$ (odnosno $a > 0$) i $a = b + 1$. Za takve a i b je zadovoljen i uvjet $g(x) \geq 0$ za svaki x.

(c) Funkcija G je kao funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable nužno neprekidna u svakoj točki. Uočimo da je G neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za $x = 0$ nužno vrijedi

$$G(0-) = G(0) \;\Leftrightarrow\; a\Phi(0) = a\Phi(0) + bF(0) \;\Leftrightarrow\; F(0) = 0.$$

Uočimo da je G nenegativna, rastuća i $G(-\infty) = 0$. Uvjet $G(+\infty) = 1$ je zadovoljen akko

$$a\Phi(+\infty) + bF(+\infty) = 1 \;\Leftrightarrow\; a + b = 1.$$

Dakle G je funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable akko $F(0) = 0$ i $a+b = 1$. Njena gustoća je tada jednaka:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x < 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + bf(x), & x > 0. \end{cases}$$

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 20. veljače 2017.

Zadatak 2. (10 bodova) Neka je $T = [0, \infty)$.

(a) Definirajte σ-algebru $\mathcal{B}^T$ Borelovih skupova na $\mathbb{R}^T$.

(b) Za $n \in \mathbb{N}$ i $t_1, ..., t_n \in T$ neka je $F_{t_1,...,t_n}$ n-dimenzionalna funkcija distribucije. Uz koje uvjete je familija $\{F_{t_1,...,t_n} : \ n \in \mathbb{N}, \ t_1, ..., t_n \in T\}$ suglasna?

(c) Iskažite Kolmogorovljev teorem.

(d) Pokažite da je suglasna familija $\{F_{t_1,...,t_n} : \ n \in \mathbb{N}, \ t_1, ..., t_n \in T\}$ funkcija distribucije ujedno i familija konačnodimenzionalnih distribucija nekog slučajnog procesa $\{X_t, \ t \in T\}$.

Rješenje.

(a) Skup $A \subset \mathbb{R}^T$ je Borelov cilindar u $\mathbb{R}^T$ ako postoje $n \in \mathbb{N}$, Borelov skup $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ te $\{t_1, ..., t_n\} \subset T$ t.d. je

$$A = \pi^{-1}_{t_1,...,t_n}(M) = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, ..., x_{t_n}) \in M\}.$$

Označimo s $\mathcal{F}^T$ familiju svih Borelovih cilindara u $\mathbb{R}^T$. Tada je $\mathcal{B}^T = \sigma(\mathcal{F}^T)$.

(b) Familija je suglasna ako vrijede sljedeći uvjeti:

(i) Za proizvoljnu permutaciju $(i_1, ..., i_n)$ od $(1, ..., n)$ vrijedi

$$F_{t_{i_1},...,t_{i_n}}(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n).$$

(ii) za sve $m < n$ vrijedi

$$F_{t_1,...,t_m}(x_1, ..., x_m) = F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_m, \infty, ..., \infty)$$

(c) N.Sarapa, Teorem 9.6 (samo iskaz)

(d) N.Sarapa, Teorem 9.7 (iskaz i dokaz od 5 redova)

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 20. veljače 2017.

Zadatak 3. (10 bodova)

(a) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koji po vjerojatnosti konvergira prema slučajnoj varijabli X. Dokažite da postoji podniz $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ takav da je $\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X$ g.s.

(b) Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ niz diskretnih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvih da X_n ima tablicu razdiobe $X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 1-p_n & p_n \end{pmatrix}$, $0 < p_n < 1$. Ispitajte da li niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji. Da li $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira po vjerojatnosti?

(c) Neka su $(X_n)_{n\geq 1}$ i X slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Dokažite da $X_n \longrightarrow X$ po distribuciji ako i samo ako za sve $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)\,.$$

Rješenje.

(a) N.Sarapa, str.325, Propozicija 10.19.

(b) Funkcija distribucije slučajne varijable X_n dana je s

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p_n, & 0 \leq x < 1/n \\ 1, & 1/n \leq x. \end{cases}$$

Za $x < 0$ vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$, a za $x > 0$ je $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1$ (neovisno o vrijednosti $p_n \in (0,1)$). Stavimo $F(x) = 0$ za $x < 0$ i $F(x) = 1$ za $x \geq 0$. Tada je $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za sve $x \neq 0$. Budući da je $C(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vrijedi $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za sve $x \in C(F)$. To znači da $X_n \longrightarrow X$ po distribuciji, gdje je $X \equiv 0$.

Budući da je X konstantna slučajna varijabla, po N.Sarapa, str.326, Propozicija 10.21, vrijedi da $X_n \longrightarrow X$ i po vjerojatnosti.

Zadatak se može riješiti na razne načine. Konvergencija po vjerojatnosti prema $X = 0$ slijedi direktno na sljedeći način: za proizvoljan $\epsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n < \epsilon$ vrijedi $\mathbb{P}(|X_n| < \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = 0$, pa je i $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| < \epsilon) = 0$. Indirektno, $\mathbb{E}\,|X_n| = \mathbb{E}\,X_n = p_n/n \leq 1/n \to 0$ kad $n \to \infty$, što znači da $X_n \to 0$ u L_1 pa i po vjerojatnosti. U stvari, vrijedi da $X_n \to 0$ g.s. (otkud slijedi konvergencija po vjerojatnosti, pa zatim i po distribuciji). Zaista, $|X_n| = X_n \leq 1/n$ g.s., pa je i $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ g.s.

(c) N.Sarapa, str. 326, Teorem 10.13.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 20. veljače 2017.

Zadatak 4. (10 bodova)

(a) Iskažite i dokažite Cauchy-Schwarzovu nejednakost za slučajne varijable X i Y.

(b) Neka je Y nenegativna slučajna varijabla s konačnim drugim momentom. Dokažite da tada vrijedi

$$\mathbb{P}(Y > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}\, Y)^2}{\mathbb{E}\, Y^2}\,.$$

(Uputa: Cauchy-Schwarz)

(c) Elementarna Markovljeva nejednakost za nenegativnu integrabilnu slučajnu varijablu X kaže da za svaki $a > 0$ vrijedi,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\, X}{a}\,.$$

Dokažite da u Markovljevoj nejednakosti vrijedi jednakost ako i samo ako je $X = a$ g.s. Nadalje, pokažite da je

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a\mathbb{P}(X \geq a)}{\mathbb{E}\, X} = 0\,.$$

Rješenje.

(a) N.Sarapa, str.314, Propozicija 10.10.

(b) Vrijedi

$$(\mathbb{E}\, Y)^2 = (\mathbb{E}\,[Y 1_{(Y>0)}])^2 \leq \mathbb{E}\, Y^2 \mathbb{E}\,(1^2_{(Y>0)}) = \mathbb{E}\, Y^2 \mathbb{P}(Y > 0)\,.$$

(c) Ako je $X = a$ g.s., tada je $\mathbb{P}(X \geq a) = 1$ i $\mathbb{E}\, X = a$, pa očito vrijedi jednakost. Obratno, pretpostavimo da vrijedi jednakost. Tada imamo

$$a\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}\, X = \mathbb{E}\,[X; X \geq a] + \mathbb{E}\,[X; X < a] \geq a\mathbb{P}(X \geq a)\,.$$

Slijedi da je $\mathbb{E}\,[X; X \geq a] = a\mathbb{P}(X \geq a)$ i $\mathbb{E}\,[X 1_{(X<a)}] = 0$. Iz druge jednakosti imamo $X 1_{(X<a)} = 0$ g.s. Prvu jednakost napišemo kao $\mathbb{E}\,[X - a; X \geq a] = 0$ otkud slijedi $X \leq a$ g.s. Iz $X 1_{(X<a)} = 0$ g.s. i $X \leq a$ g.s. dobivamo da je $X \in \{0, a\}$ g.s. (Zadatak je bio neprecizno zadan; ako u Markovljevoj nejednaksoti vrijedi jednakost, tada X može poprimiti vrijednosti samo u skupu $\{0, a\}$. Svaka slučajna varijabla s tablicom razdiobe $X \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $0 \leq p \leq 1$ zadovoljava da je $a\mathbb{P}(X \geq a) = ap = \mathbb{E}\, X$)

Za drugu tvrdnju dovoljno je pokazati da je $\lim_{a\to\infty} a\mathbb{P}(X \geq a) = 0$. Budući da je $\lim_{a\to\infty} X 1_{(X\geq a)} = 0$ g.s., i sve te slučajne varijable su dominirane integrabilnom X, po Lebesguevom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{a\to\infty} \mathbb{E}\,[X; X \geq a] = \lim_{a\to\infty} \mathbb{E}\,[X 1_{(X\geq a)}] = 0\,.$$

Budući da je $\mathbb{E}\,[X; X \geq a] \geq a\mathbb{P}(X \geq a) \geq 0$, odmah slijedi tvrdnja.