TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Drugi kolokvij – 6. veljače 2017.

Zadatak 1. (7 bodova)

(a) Dokažite da za svaku slučajnu varijablu X i sve $\varepsilon > 0$ i $t \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X > \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

(b) Neka je $M > 0$ t.d. $\mathbb{E}\left[e^{-tX}\right] \leq M$ za svaki $t > 0$. Pokažite da je X nenegativna slučajna varijabla gotovo sigurno.

Rješenje.

(a) Primijenimo Markovljevu nejednakost na $Y = e^{tX}$ za $r = 1$. Ili pokažemo direktno, označimo $A = \{X > \varepsilon\}$ i $T = \{t \geq 0 : \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] < \infty\}$. Uočimo $T \neq \emptyset$. Za $t \in T$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX}1_A\right] + \mathbb{E}\left[e^{tX}1_{A^c}\right] \geq \mathbb{E}\left[e^{tX}1_A\right] \geq e^{t\varepsilon}\mathbb{E}\left[1_A\right] = e^{t\varepsilon}\mathbb{P}(A).$$

Stoga je $\mathbb{P}(X > \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$, za svaki $t \in T$ pa tvrdnja vrijedi.
Napomena: Uočimo kako ne možemo direktno primijeniti Kolmogorovljevu nejednakost, jer funkcija $g(x) = e^{tx}$ nije parna. S druge strane, uzmemo li funkciju $g(x) = e^{t|x|}$ koja zadovoljava uvjete, dobijemo slabiju gornju ogradu od tražene.

(b) Za $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\mathbb{P}(X < -\varepsilon) = \mathbb{P}(-X > \varepsilon) \leq \inf_{t \geq 0} e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}\left[e^{-tX}\right] \leq \inf_{t \geq 0} Me^{-t\varepsilon} = 0$$

pa je prema tome $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{X < \frac{1}{n}\}\right) = 0$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Drugi kolokvij – 6. veljače 2017.

Zadatak 2. (8 bodova)

(a) U kojem su odnosu konvergencija po vjerojatnosti i konvergencija po distribuciji niza slučajnih varijabli? Svoju tvrdnju dokažite.

(b) Neka su $X \sim N(0,1)$ i Y slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru te $\mathbb{E}[|Y|] = \infty$. Neka su $a \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $b \in (-1,1)$ t.d. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ispitajte konvergenciju niza $(a_n X + b^n Y)_{n\in\mathbb{N}}$ po vjerojatnosti i u srednjem reda p. U slučaju konvergencije, odredite graničnu distribuciju.

Rješenje.

(a) N. Sarapa Teorem 10.12(iii)

(b) Uočimo da $a_n X \xrightarrow{\text{g.s.}} aX$ i $b^n Y \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$. Tada $a_n X + b^n Y \xrightarrow{\text{g.s.}} aX$ što povlači da $a_n X + b^n Y \xrightarrow{\mathbb{P}} aX$.

Neka je $p \geq 1$. Iz prethodnog rezultata slijedi kako je aX jedini kandidat za limes u srednjem reda p. Kako je $\mathbb{E}[|Y|] = \infty$ i $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, za $b \in (-1,1) \setminus \{0\}$ slijedi

$$\mathbb{E}[|a_n X + b^n Y|] \geq |b|^n \mathbb{E}[|Y|] - |a_n| \mathbb{E}[|X|] = \infty$$

pa niz ne konvergira u srednjem reda 1 (pa ni u srednjem reda p). Ako je $b = 0$ onda je

$$\mathbb{E}[|a_n X - aX|^p] = |a_n - a|^p \mathbb{E}[|X|^p] \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

odnosno $a_n X \xrightarrow{L^p} aX$.

Promotrimo slučajeve kada niz konvergira. Uočimo da je granična razdioba jednaka $N(0, a^2)$ za $a \neq 0$, odnosno degenerirana 0 za $a = 0$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Drugi kolokvij – 6. veljače 2017.

Zadatak 3. (7 bodova)

(a) Dokažite da niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\geq 1}$ definiranih na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geq \epsilon\}\right) = 0\,.$$

(b) Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$ i $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$. Dokažite da $X_n \longrightarrow 0$ po vjerojatnosti ako i samo ako $p_n \to 0$.

(c) Neka su X_n kao u (b). Ako $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$, tada $X_n \longrightarrow 0$ gotovo sigurno. Dokažite. Da li vrijedi obrat te tvrdnje?

Rješenje.

(a) Vidi N. Sarapa, Propozicija 10.16. (i).

(b) Za $\epsilon \in (0,1)$ vrijedi $\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0$ ako i samo ako $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

(c) Neka je $\epsilon \in (0,1)$. Tada je

$$\mathbb{P}\left(\cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k| \geq \epsilon\}\right) \leq \sum_{k=n} \mathbb{P}\{|X_k| \geq \epsilon\} = \sum_{k=n} p_k\,.$$

Zbog $\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n} p_k = 0$, pa tvrdnja vrijedi po dijelu (a).

Obrat: neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, te definiramo $X_n = \mathbf{1}_{[0,1/n]}$. Očito vrijedi $X_n \to 0$ gotovo sigurno. S druge strane, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Drugi kolokvij – 6. veljače 2017.

Zadatak 4. (8 bodova)

(a) Neka je (X_1, X_2) dvodimenzionalni slučajni vektor s vektorom očekivanja $m = (m_1, m_2)$ i kovarijacijskom matricom $M = [\mu_{ij}]$, $\mu_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Dokažite da je M pozitivno definitna matrica, t.j.,

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mu_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq 0 \qquad \text{za sve } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Dokažite da ako je $\det(M) = 0$, tada postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je ili $X_2 = aX_1 + b$ (g.s.) ili $X_1 = aX_2 + b$ (g.s.).

(c) Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}\,X \geq 0$. Pokažite da za sve $\lambda \geq 0$ vrijedi

$$(1-\lambda)\mathbb{E}\,X \leq \mathbb{E}\,[X\mathbf{1}_{(X>\lambda\mathbb{E}\,X)}]\,.$$

Ako je $0 \leq \lambda < 1$ upotrebom Cauchy-Schwarzove nejdnakosti pokažite da je

$$\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}\,X) \geq (1-\lambda)^2\frac{(\mathbb{E}\,X)^2}{\mathbb{E}\,X^2}$$

.

Rješenje.

(a) Vidi N. Sarapa, str. 317.

(b) Zbog $0 = \det(M) = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2$, vrijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) &= \lambda_1^2\mu_{11} + 2\lambda_1\lambda_2\mu_{12} + \lambda_2^2\mu_{22}\\ &= \lambda_1^2\mu_{11} + 2\lambda_1\lambda_2\mu_{11}^{1/2}\mu_{22}^{1/2} + \lambda_2^2\mu_{22} = \left(\lambda_1\mu_{11}^{1/2} + \lambda_2\mu_{22}^{1/2}\right)^2\end{aligned}$$

Ako su $X_1 = X_2 =$ (g.s.) tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo $\mathbb{P}(X_2 \neq 0) > 0$. Tada je $\mu_{22} \neq 0$. Odaberimo $\lambda_1 = -\mu_{22}^{1/2}$ i $\lambda_2 = -\mu_{11}^{1/2}$. Tada je

$$\mathrm{Var}(-\mu_{22}X_1 + \mu_{11}X_2) = 0$$

otkud $-\mu_{22}X_1 + \mu_{11}X_2 = c$ (g.s.) za neki $c \in \mathbb{R}$. Slijedi da je $X_1 = \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}X_2 + \frac{c}{\mu_{22}}$ (g.s.).

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,X &= \mathbb{E}\,[X\mathbf{1}_{(X>\lambda\mathbb{E}\,X)}] + \mathbb{E}\,[X\mathbf{1}_{(X\leq\lambda\mathbb{E}\,X)}]\\ &\leq \mathbb{E}\,[X\mathbf{1}_{(X>\lambda\mathbb{E}\,X)}] + \mathbb{E}\,[\lambda\mathbb{E}\,X\mathbf{1}_{(X\leq\lambda\mathbb{E}\,X)}]\\ &\leq \mathbb{E}\,[X\mathbf{1}_{(X>\lambda\mathbb{E}\,X)}] + \lambda\mathbb{E}\,X\,.\end{aligned}$$

Ako je $0 \leq \lambda < 1$, tada je $0 \leq (1-\lambda)\mathbb{E}\,X$, pa Cauchy-Schwarz daje

$$(1-\lambda)^2(\mathbb{E}\,X)^2 \leq (\mathbb{E}\,[X\mathbf{1}_{(X>\lambda\mathbb{E}\,X)}])^2 \leq (\mathbb{E}\,X^2)(\mathbb{E}\,\mathbf{1}^2_{(X>\lambda\mathbb{E}\,X)}) = (\mathbb{E}\,X^2)\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}\,X)\,.$$