MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 15. veljače 2016.

- Broj zadataka: 4
- Ukupan broj bodova: 40
- Rezultati i uvidi: petak 19.02. u 13h
- Popravni kolokvij: utorak 23.02. u 9h

Zadatak 1. Neka je F neprekidna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ i f pripadna vjerojatnosna funkcija gustoće. Za koju vrijednost parametra $c \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$g(x) = f(x)\left(\frac{1}{2} + c(F(x)+1)\right)$$

vjerojatnosna funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable?

[4 boda]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 15. veljače 2016.

Zadatak 2.

(a) Iskažite tri definicije napete vjerojatnosne mjere na metričkom prostoru i dokažite da su one ekvivalentne.

(b) Koja klasa metričkih prostora ima svojstvo da je svaka vjerojatnosna mjera na njima napeta? Iskažite i dokažite odgovarajući teorem.

[12 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 15. veljače 2016.

Zadatak 3.

(a) Iskažite i dokažite Kolmogorovljevu nejednakosti pokažite kako se iz nje dobivaju Markovljeva i Čebiševljeva nejednakost.

(b) Dokažite tvrdnju:
Niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je Cauchyjev niz (g.s.) $\Leftrightarrow$ za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|X_{n+k} - X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

[18 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 15. veljače 2016.

Zadatak 4. Neka je $U \sim U(0,1)$ uniformna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > \beta$ i

$$X_n = -n^\beta 1_{(0,\frac{1}{n})}(U) + n^\alpha 1_{(\frac{n-1}{n},1)}(U), \quad n \in \mathbb{N}.$$

U ovisnosti o parametrima α i β, ispitajte konvergenciju niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ po vjerojatnosti, u srednjem reda p i gotovo sigurno.

[6 bodova]