MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 1. veljače 2016.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30

Zadatak 1.

(a) Definirajte familiju $\mathcal{F}^T$ svih Borelovih cilindara u $\mathbb{R}^T$ i dokažite da je $\mathcal{F}^T$ algebra skupova $\mathbb{R}^T$. Definirajte familiju $\mathcal{P}^T$ svih Borelovih pravokutnika u $\mathbb{R}^T$ i dokažite da je $\sigma(\mathcal{F}^T) = \sigma(\mathcal{B}^T)$.

(b) Što je to zakon razdiobe slučajnog procesa? U kakvoj je on vezi s konačno-dimenzionalnim distribucijama tog slučajnog procesa? Dokažite!

(c) Iskažite i dokažite teorem koji opravdava zadavanje slučajnih procesa pomoću njihovih konačno-dimenzionalnih distribucija.

[10 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 1. veljače 2016.

Zadatak 2.

(a) Iskažite i dokažite tvrdnju koja daje nužne i dovoljne uvjete za konvergenciju niza slučajnih varijabli po vjerojatnosti u terminima konvergencije gotovo sigurno.

(b) Koristeći (a) dokažite tvrdnju:
Ako $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$ $(n \to \infty)$, $Y_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} Y$ $(n \to \infty)$ i $Z_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} Z$ $(n \to \infty)$ tada

$$e^{X_n Y_n + Z_n} \xrightarrow{(\mathbb{P})} e^{XY+Z} \; (n \to \infty).$$

[6 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 1. veljače 2016.

Zadatak 3. Neka su X i Y slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & \text{a} \\ \text{1-p} & \text{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y \text{ i } \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$$

za $a > 0$ i $p \in (0,1)$. Pokažite da je tada

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \mathbb{P}(X \geq a).$$

[5 bodova]

Rješenje: Markovljeva nejednakost:

$$\mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[Y^r]}{a^r}, \quad r = 1, 2.$$

Za $r = 1$ ne znamo koliko je $\mathbb{E}|Y|$ (općenito različito od $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X = ap$), ali za $r = 2$ imamo $\mathbb{E}[Y^2] = \mathrm{Var}Y - (\mathbb{E}Y)^2 = a^2 p$. Slijedi

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{a^2} = p = \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \geq a).$$

Drugi način je preko jednostrane Čebiševljeve nejednakosti:

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \mathbb{P}(Y - ap \geq a - ap) \leq \mathbb{P}(|Y - ap| \geq a - ap) \leq \frac{\mathrm{Var}Y}{\mathrm{Var}Y + a^2(1-p)^2} = p = \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \geq a).$$

Primjena dvostruke Čebiševljeve nejednakosti ne daje traženu ocjenu već samo $\leq \frac{p}{1-p}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 1. veljače 2016.

Zadatak 4. Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dane su slučajne varijable $X, X_1, X_2, \ldots$ i neka je $X_n \sim N(\mu, \sigma_n^2)$.

(a) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, ispitajte konvergenciju u srednjem reda 1 niza (X_n).

(b) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma > 0$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, odredite distribuciju slučajne varijable X.

(c) Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2$ konvergira, dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \varepsilon)$$

te ispitajte konvergenciju (g.s.) niza (X_n).

[9 bodova]

Rješenje:

(a) Uočimo $\sigma_n^2 = \mathrm{Var} X_n$. Varijanca teži u 0 pa je kandidat za limes kontanta μ.
Preko CSB nejednakosti (Holdera): $\mathbb{E}[|X-\mu|] \leq \mathbb{E}[(X-\mu)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_n \to 0$.
Direktno: $\mathbb{E}[|X-\mu|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}} dt = \frac{\sigma_n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \to 0$.

(b) Očito $X_n \xrightarrow{(D)} X$ pa znamo $F_n(x) \to F(x)$, $\forall x \in C(F)$.Vrijedi

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}} dt \xrightarrow{LTDK} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = F_{N(\mu,\sigma^2)}(x).$$

LTDK smo mogli iskoristiti zato što je $\sigma_n \in (a,b)$ i $a > 0$ pa je

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}} dt = f(t)$$

i f je integrabilna na $\mathbb{R}$. Slijedi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(c) Po Čebiševljevoj nejednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2} < \infty.$$

Po 1. Borel-Cantelli lemi slijedi $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, $A_n = \{|X_n - \mu| > \varepsilon\}$ pa po Propoziciji 10.16. slijedi $X_n \xrightarrow{(g.s.)} \mu$.