MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 20. veljače 2015.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 40
- Popravni kolokvij: petak 27.02. u 9h

Zadatak 1. Odredite $a, b, c \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) = 1_{(-\infty,1/2)}(x) + (1/2 + a)1_{\{1/2\}}(x) + (x + a + b)1_{(1/2,3/4)}(x) + (7/8 + a + b)1_{[3/4,\infty)}(x) + c$$

funkcija distribucije neke slučajne varijable X. Odredite $\mathbb{P}(X \in (0, 3/4))$ i $\mathbb{P}(X \in [1/2, 1])$.

[4 boda]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 20. veljače 2015.

Zadatak 2. Neka su X_n, $n \in \mathbb{N}$ i X slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Pokažite da za svaki $a > 0$ vrijedi $\mathbb{E}[\min\{|X|, 1\}] \leq a + \mathbb{P}(|X| > a)$.

(b) Dokažite: $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\min\{|X_n - X|, 1\}] = 0$.

[6 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 20. veljače 2015.

Zadatak 3. Dokažite tvrdnju:

$$X_n \xrightarrow{\text{(g.s.)}} X \;\Leftrightarrow\; \text{ za svaki } \varepsilon > 0 \text{ vrijedi } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

[12 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 20. veljače 2015.

Zadatak 4.

(a) U kojem slučaju je konvergencija po distribuciji niza slučajnih varijabli ekvivalentna konvergenciji po vjerojatnosti tog niza? Iskažite i dokažite odgovarajući teorem.

(b) Neka su $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ i μ vjerojatnosne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Kažemo da niz (μ_n) slabo konvergira prema μ (oznaka $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$) ako za svaku ograničenu neprekidnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

Neka su $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i X slučajne varijable, neka su P_{X_n} $(n \in \mathbb{N})$ i P_X njihovi zakoni razdiobe i neka $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$. Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, dokažite da $P_{f(X_n)} \xrightarrow{w} P_{f(X)}$.

[18 bodova]