MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 27. siječnja 2014.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30

Zadatak 1. Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) Ako je $X \geq 0$ (g.s.) i $\mathbb{E}X = 0$ tada je $X = 0$ (g.s.).

(b) Ako je $\mathbb{E}[X^6] = \mathbb{E}[X^3] = 1$, slučajna varijabla X je degenerirana.

[7 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 27. siječnja 2014.

Zadatak 2.

(a) Za $U \sim U(0,1)$ uniformnu slučajnu varijablu dan je niz slučajnih varijabli $X_n = \sqrt{n}1_{\langle 0,\frac{1}{n}\rangle}(U)$, $n \in \mathbb{N}$. Odredite limes po vjerojatnosti tog niza. Konvergira li niz u srednjem reda q (ako da, za koje q)?

(b) Pokažite da za padajući niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{(g.s.)} 0.$$

[7 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 27. siječnja 2014.

Zadatak 3. Dokažite tvrdnju:
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz (g.s.) $\Leftrightarrow$ za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|X_{n+k} - X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

[7 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 27. siječnja 2014.

Zadatak 4.

(a) Iskažite i dokažite tvrdnju koja daje nužne i dovoljne uvjete za konvergenciju niza slučajnih varijabli po vjerojatnosti u terminima konvergencije gotovo sigurno.

(b) Koristeći (a) dokažite tvrdnju:
Ako $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ $(n \to \infty)$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ $(n \to \infty)$ tada

$$e^{X_n Y_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{XY} \ (n \to \infty).$$

[9 bodova]