MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 28. siječnja 2013.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 40

## Zadatak 1.

(a) Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$. Navedite koja svojstva treba zadovoljavati funkcija $F$ da bismo je zvali vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}^2$. Je li vjerojatnosna funkcija distribucije monotona rastuća po obje varijable? Obrazložite!

(b) Neka je $X$ dvodimenzionalni slučajni vektor i $F_X$ njegova funkcija distribucije. Je li $F_X$ vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}^2$ u smislu definicije iz (a)? Obrazložite!

[15 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 28. siječnja 2013.

**Zadatak 2.** Neka je $F$ neprekidna vjerojatnosna funkcija distirbucije na $\mathbb{R}$. Izračunajte

$$\int_{\mathbb{R}} 2F(x)dF(x).$$

[5 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 28. siječnja 2013.

**Zadatak 3.** Neka je $X$ nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pokažite da $X$ ima konačno očekivanje ako i samo ako je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(n-1 \leq X < n) < +\infty.$$

[5 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 28. siječnja 2013.

**Zadatak 4.** Neka su $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ i $\mu$ vjerojatnosne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Kažemo da niz $(\mu_n)$ slabo konvergira prema $\mu$ (oznaka $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$) ako za svaku ograničenu neprekidnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

Neka su $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i $X$ slučajne varijable, neka su $(P_{X_n}, n \in \mathbb{N})$ i $P_X$ njihovi zakoni razdiobe i neka $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$. Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, dokažite da $P_{f(X_n)} \xrightarrow{w} P_{f(X)}$.

*Uputa:* Prvo dokažite da za proizvoljnu Borelovu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} (g \circ f) dP_X = \int_{\mathbb{R}} g dP_{f(X)}$$

(u smislu jednakosti integrala).

[15 bodova]