

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 12. studeni 2012.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30
- Rezultati: ponedjeljak 14.11. u 13h

Zadatak 1. Neka je (Ω, \mathcal{F}) izmjerivi prostor.(a) Neka je $D \subset \mathbb{R}$ gust u \mathbb{R} i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje za koje je

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in D.$$

Pokažite da je X slučajna varijabla na (Ω, \mathcal{F}) .

[3 boda]

(b) Neka su $X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n$ slučajne varijable na (Ω, \mathcal{F}) . Pokažite da je

$$\left\{ \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \right\} \in \mathcal{F}$$

te da vrijedi relacija

$$X_i = Y_i \text{ (g.s.)}, \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \text{ (g.s.)}.$$

[4 boda]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 12. studeni 2012.

Zadatak 2.

- (a) Neka je F (topološki) neprekidna funkcija distribucije na \mathbb{R} i neka je $F(0) = 0$. Je li funkcija G definirana s

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - F(\frac{1}{x}), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

također vjerojatnosna funkcija distribucije na \mathbb{R} ? Svoju tvrdnju dokažite. [4 boda]

- (b) Neka je X slučajna varijabla s uniformnom distribucijom $X \sim U(0, 1)$. Nađite Borelovu funkciju f takvu da slučajna varijabla $f(X)$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom 1. [3 boda]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 12. studeni 2012.

Zadatak 3.

- (a) Iskažite teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete na Borelovu funkciju $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da ona bude gustoća vjerojatnosti nekog neprekidnog slučajnog vektora.
- (b) Definirajte višedimenzionalnu normalnu razdiobu i dokažite da je ona dobro definirana.

[7 bodova]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 12. studeni 2012.

Zadatak 4.

- (a) Koja klasa metričkih prostora ima svojstvo da je svaka vjerojatnosna mjera na njima napeta? Iskažite i dokažite odgovarajući teorem.
- (b) Definirajte familiju \mathcal{F}^T svih Borelovih cilindara u \mathbb{R}^T . Dokažite da je \mathcal{F}^T algebra skupova u \mathbb{R}^T . Što je σ -algebra Borelovih skupova u \mathbb{R}^T ?

[9 bodova]