MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 30. siječnja 2012.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 40

Zadatak 1. Neka su X i $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pokažite sljedeće tvrdnje:

(a) $\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\} \in \mathcal{F}$.

(b) Ako je $\Omega = \mathbb{R}$ i X diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}$ tada je i njena derivacija X' slučajna varijabla.

[5 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 30. siječnja 2012.

Zadatak 2.

(a) Iskažite definiciju vjerojatnosne funkcije ditribucije na $\mathbb{R}^n$. Je li takva funkcija nužno monotono rastuća po svakoj varijabli? Dokažite odgovarajuću tvrdnju.
Neka je $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ vjerojatnosna funkcija distribucije. Je li ona nužno funkcija distribucije nekog slučajnog vektora? Iskažite i dokažite odgovarajuću tvrdnju.

(b) Definirajte višedimenzionalnu normalnu razdiobu te dokažite da je ona dobro definirana. Na koji teorem se u tom dokazu pozivate?

[15 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 30. siječnja 2012.

Zadatak 3.

(a) Neka je $T = \mathbb{R}$ ili je T interval na $\mathbb{R}$. Definirajte algeru $\mathcal{F}^T$ svih Borelovih cilindara u $\mathbb{R}^T$ te obrazložite zašto je ona algebra podskupova od $\mathbb{R}^T$. Što je σ-algebra Borelovih skupova na $\mathbb{R}^T$?
Definirajte suglasnu familiju konačno-dimenzionialnih funkcija distribucije te dokažite da ona definira funkciju $P_T : \mathcal{F}^T \to [0, 1]$ koja je konačno aditivna i vrijedi $P_T(\Omega) = 1$. Zatim iskažite Kolmogorovljev teorem o konstrukciji vjerojatnosti na $\mathcal{B}^T$.

(b) Iskažite i dokažite teorem koji opravdava zadavanje slučajnih procesa pomoću njihovih konačno-dimenzionalnih distribucija.

[15 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij - 30. siječnja 2012.

Zadatak 4. Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednako distribuiranih slučajnih varijabli i neka red $\sum_{i=1}^{n} X_n$ konvergira po vjerojatnosti. Dokažite da je tada $X_n = 0$ (g.s.), za svaki $n \in \mathbb{N}$. [5 bodova]