MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 16. siječnja 2012.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30
- Rezultati: ponedjeljak 23.01. u 13h

Zadatak 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor

(a) Iskažite Hölderovu nejednakost.

(b) Ako je $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $Y \geq 0$ (g.s.) dokažite

$$\mathbb{P}(Y > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Uputa: Izrazite $\mathbb{P}(Y > 0)$ preko očekivanja. [7 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 16. siječnja 2012.

Zadatak 2. Neka je X slučajna varijabla i g nenegativna Borelova funkcija takva da je $\mathbb{E}[g(X)] < \infty$. Ako je g parna funkcija i neopadajuća na $[0, \infty\rangle$ dokažite da za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\varepsilon)}.$$

Obrazložite kako iz ove nejednakosti slijede Markovljeva i Čebiševljeva nejednakost.

[6 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 16. siječnja 2012.

Zadatak 3. Iskažite i dokažite osnovni teorem o odnosu četiri tipa konvergencije slučajnih varijabli. [10 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij - 16. siječnja 2012.

Zadatak 4. Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.d. je $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$ i $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_n \to 0, \quad n \to \infty.$

(b) $X_n \xrightarrow{(g.s.)} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$

[7 bodova]