MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 07. studeni 2011.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30
- Rezultati: ponedjeljak 14.11. u 13h

**Zadatak 1.** Neka je $X$ slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{\mathcal{B}([0,1])}\big)$.

(a) Je li preslikavanje

$$Y(\omega) = \begin{cases} \omega, & \omega \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ \sin X(\omega), & \omega \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru? Svoju tvrdnju dokažite!

(b) Ako je $X = \alpha \cdot 1_{[0,\frac{1}{2}]}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, nađite najmanju $\sigma$-algebru $\mathcal{G}$ za koju je $X$ slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $([0,1], \mathcal{G}, \lambda|_{\mathcal{G}})$.

[6 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 07. studeni 2011.

**Zadatak 2.** Neka je $X$ slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F_X$ i neka je $G_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preslikavanje definirano s $G_X(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$.

(a) Pokažite da je $G_X$ funkcija distribucije akko je $F_X$ neprekidna.

(b) Ako je $F_X(x) = x1_{[0,\frac{1}{2}\rangle} + 1_{[\frac{1}{2},\infty\rangle}$ izračunajte $\mathbb{P}(X \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$ i $\mathbb{P}(X \in [\frac{1}{2}, 1])$.

[8 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 07. studeni 2011.

## Zadatak 3.

(a) Što je po definiciji vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$? Iskažite i dokažite tvrdnju koja ustanovljava vezu između vjerojatnosnih funkcija distribucije i vjerojatnosnih mjera na $\mathbb{R}^n$.

(b) Neka je $X$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom distribucije $F_X$ i gustoćom $f_X$. Dokažite tvrdnju : za svaki Borelov skup $B \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\mathbb{P}\{X \in B\} = \int_B f_X(x) d\lambda^{(n)}(x).$$

Kako glasi slična formula za $\mathbb{P}\{g(X) \in B\}$, gdje je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Borelova funkcija? Obrazložite!

[8 bodova]

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 07. studeni 2011.

**Zadatak 4.** Definirajte regularnu vjerojatnosnu mjeru na metričkom prostoru $S$. Je li zahtjev regularnosti ograničenje na vjerojatnosne mjere definirane na metričkom prostoru? Iskažite i dokažite odgovarajući teorem! [8 bodova]