

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 08. studeni 2010.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30

Zadatak 1.

(a) Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pokažite da je skup

$$\{X_1 < X_2 < \dots < X_{n-1} < X_n\}$$

dogadjaj iz $\mathcal{F}$.

[2 boda]

(b) Dokažite da je

$$\mathcal{B}^{m+n} = \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{B}^m, B \in \mathcal{B}^n\} =: \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n.$$

Napomena: Pokušajte iskoristiti karakterizaciju produkta σ -algebri preko projekcija.

[5 bodova]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 08. studeni 2010.

Zadatak 2. Neka su X i Y slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.(a) Dokažite da za $Y = e^X$ vrijedi

$$\sigma(X) = \sigma(Y),$$

gdje su $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$ σ -algebre inducirane slučajnim varijablama X i Y . [2 boda](b) Vrijedi li jednakost iz (a) dijela zadatka za $Y = g(X)$, gdje je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna Borelova funkcija? Obrazložite! [1 bod]

(c) Dokažite da je

$$\sigma(2X + Y, X + 2Y) = \sigma(X, Y).$$

Napomena: $\sigma(X, Y) = \sigma(\sigma(X) \cup \sigma(Y))$. [4 boda]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 08. studeni 2010.

Zadatak 3.

- (a) Neka su $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i X slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Dokažite tvrdnju:

$$X_n \xrightarrow{(g.s.)} X \quad (n \rightarrow \infty) \iff (X_n, n \in \mathbb{N}) \text{ je Cauchyjev niz (g.s.).}$$

- (b) Neka je $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ zadana vjerojatnosna funkcija distribucije. Dokažite tvrdnju:
postoji slučajna varijabla X čija je funkcija distribucije jednaka zadanoj funkciji F .

[8 bodova]

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij - 08. studeni 2010.

Zadatak 4. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X .(a) Dokažite tvrdnju: za svaki Borelov skup $B \subset \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\{X \in B\} = \int_B f_X(x) d\lambda(x),$$

 $(\lambda$ je Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$).(b) Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Dokažite da za svaki Borelov skup $B \subset \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\mathbb{P}\{g(X) \in B\} = \int_{\{y: g(y) \in B\}} f_X(x) d\lambda(x).$$

[8 bodova]