VREMENSKI NIZOVI 1

STATISTIČKI PRAKTIKUM 2

5. VJEŽBE

Vremenski nizovi

Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $\{X_t, t \in T\}$ na nekom vjerojatnosnom prostoru. T je skup indeksa koji određuje vremenesku komponentu podataka, npr. $T = [0, t]$, $T = [0, \infty\rangle$ ili $T = \{t_i : i \in I\}$.

Pri određenom mjerenju mi opažamo realizaciju (dijela) vremenskog niza $\{X_t(\omega), t \in T_0\} = \{x_t, t \in T_0\}$, gdje je $T_0 \subset T$ konačan.

Klasična dekompozicija

Realizacija procesa može sugerirati sljedeću reprezentaciju procesa

$$X_t = m_t + s_t + Y_t,\ t \in T$$

gdje je

- $t \mapsto m_t$ je polako promjenjiva (neslučajna) funkcija (*trend*)
- $t \mapsto s_t$ je (neslučajna) funkcija s poznatim periodom d (*sezonalna komponenta*)

$$s_{t+d} = s_t \ \forall t, \qquad \sum_{t=1}^{d} s_t = 0$$

- $\{Y_t, t \in T\}$ je slučajni stacionarni niz (*buka/šum*)

Stacionaran niz

Vremenski niz $(Y_t \; : \; t \in \mathbb{Z})$ je stacionaran ako je

1. $\mathbb{E}|Y_t|^2 < +\infty$ za sve $t \in \mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{E}Y_t = \mu$ za sve $t \in \mathbb{Z}$;
3. $\gamma_Y(r,s) := E[(Y_r - \mu)(Y_s - \mu)] =$ $E[(Y_{r+t} - \mu)(Y_{s+t} - \mu)] =: \gamma_Y(r+t, s+t)$ za sve $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

$\gamma_Y(t) := \gamma_Y(t+s, s)$ - autokovarijacijska funkcija
$\rho_Y(t) := \gamma_Y(t)/\gamma_Y(0)$ - autokorelacijska funkcija

Analiza vremenskog niza

Kod analize vremenskih nizova prvo krećemo s crtanjem grafa. Ako postoje očiti diskontinuiteti poput naglih promjena na nekoliko mjesta, vremenski niz treba razbiti na više samostalnih segmenata. Također treba provjeriti pozadinu podataka da ne bi ispalo da je podatak krivo zabilježen.

Cilj: procijeniti pojedine komponente klasične dekompozicije

1. sezonalnost s
2. trend m
3. šum Y

Primjer

Neka su $(\varepsilon_i)_{i=1}^{100}$ n.j.d. $N(0,1)$, $f(t) = (\frac{t}{10})^2 - t$ i neka je

$$Z_0 = 0,\ Z_1 = \varepsilon_1;\ Z_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2} Z_{t-1} + \frac{1}{4} Z_{t-2}, t \geq 3.$$

Generirajte i grafički prikažite jednu realizaciju slučajnog niza X,

$$X_t = f(t) + Z_t, \quad t \in \{1, \ldots, 100\}.$$

Sezonalna ponavljanja javljaju se prirodno i ovise o samoj pozadini problema. Npr. ako nešto mjerimo po danima, može se dogoditi da svakih 5 (7 ili 30) mjerenja uočavamo periodična odstupanja. Ako promatramo populaciju po godišnjima dobima (period 4), u proljeće i ljeto će populacija biti stabilnija, a ranjivija u jesen i zimu. Dodajte sljedeću sezonalnu komponentu našoj realizaciji:

$$d = 4, s_1 = 5, s_2 = 1, s_3 = -2, s_4 = -4.$$

Grafički prikažite dobiveni niz.

Vremenski nizovi u R-u

Prvo moramo odrediti period *d* - on je poznat ili iz pozadine problema ili se može očitati sa grafa.
Vremenski niz zapisujemo u strukturu podataka `ts`:

```
> xt=ts(xx,start=1,freq=4)
> xt
          Qtr1       Qtr2        Qtr3        Qtr4
1    3.8151334  -1.7644974  -5.1097122  -8.2420158
2    0.8405033  -3.5992603  -8.1428177 -10.1876407
3   -3.3794320  -8.0372058 -12.0583187 -15.0705251
---
25   0.47481204 -0.05321804 -6.03541059 -3.14502481
```

I. Analiza vremenskog niza bez sezonalne komponente

$$X_t = m_t + Y_t$$

Ukoliko vremenski niz nema sezonalni komponentu, ostaje nam procijeniti trend i šum. Česte metode za procjenu i/ili uklanjanje trenda su

- metoda linearnog filtera
- metoda najmanjih kvadrata
- diferenciranje niza.

Metoda linearnog filtera

Trend vremenskog niza X u trenutku t procjenjujemo s

$$\hat{m}_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_i X_{t+i}.$$

Jednostavna klasa linearnih filtera su pomični prosjeci s jednakim težinama: za $a \in \mathbb{N}$ uzmemo

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2a+1} \sum_{k=-a}^{a} X_{t+k}.$$

U ovom slučaju procjena trenda u trenutku t je dana s prosjekom vrijednosti skupa $\{x_{t-a}, \ldots, x_t, \ldots, x_{t+a}\}$.

Procijenite trend vremenskog niza $\mathtt{x}$ metodom linearnog trenda za $a = 2$ i grafički ga prikažite.

Metoda najmanjih kvadrata

Procijenite trend podataka x metodom najmanjih kvadrata i grafički ga prikažite.

Diferenciranje

Za niz (X_t) diferenciranje j-tog reda definiramo rekurzivno

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}, \quad \nabla^j X_t = \nabla(\nabla^{j-1} X_t).$$

Ako je trend polinom k-tog stupnja, niz trebamo diferencirati k puta da uklonimo trend.

$$m_t = \sum_{j=0}^{k} a_j t^j \Rightarrow \nabla^k X_t = k! a_k + \nabla^k Y_t$$

Diferencirajte niz x kako bi uklonili trend te grafički prikažite ostatak.

II. Procjena sezonalne komponente

Postoji nekoliko načina na koje možemo procijeniti i/ili ukloniti sezonalnu komponentu vremenskog niza. Nakon toga nastavljamo s procedurama za niz bez sezonalne komponente.

Često za procjenu sezonalnosti koristimo

- metodu malog trenda
- metodu pomičnih zareza
- diferenciranje

Metoda malog trenda

Ako je trend malen (sporo promjenjiv), nije nerazumno pretpostaviti da je trend konstantan kroz neki period duljine d (npr. trend kroz godinu je isti).
Neka je $(x_n)_{n=1}^{100}$ niz podataka zapisan u vektoru, označimo k-ti kvartal j-te sezone sa

$$x_{j,k} := x_{k+4(j-1)}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \ j = 1, \ldots, 25.$$

Trend u j-toj sezoni procjenjujemo s

$$\hat{m}_j = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} x_{j,k}.$$

Sezonalnu komponentu k-te sezone procjenjujemo s

$$\hat{s}_k = \frac{1}{25} \sum_{j=1}^{25} (x_{j,k} - \hat{m}_j), \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Procijenite metodom malog trenda sezonalnu komponentu podataka xx i nacrtajte podatke bez sezonalne komponente.

Metoda pomičnih zareza

Ova tehnika ne ovisi o pretpostavci da je u tijeku sezone trend m_t konstanta. Trend procjenjujemo linearnim filterom i to na sljedeći način

- Ako je period $d = 2q + 1$ neparan

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d} \sum_{k=-q}^{q} x_{k+t}.$$

- Ako je $d = 2q$ paran sa

$$\hat{m}_t = \frac{0.5x_{t-q} + x_{t-q+1} + \ldots + x_{t+q-1} + 0.5x_{t+q}}{d}.$$

Dalje računamo prosjek w_k skupa $\{(x_{k+jd} - \hat{m}_{k+jd}) \ : \ q < k + jd \leq n - q\}$, $k = 1, \ldots, d$. Kako suma w_k-ova nije nužno 0, s_k procjenjujemo sa

$$\hat{s}_k = w_k - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} w_j.$$

Procijenite metodom pomičnih zareza sezonalnu komponentu podataka xx i nacrtajte podatke bez sezonalne komponente.

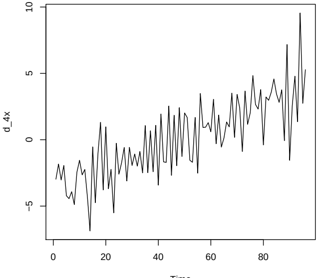
Diferenciranje

Na vremenskom nizu (X_t) sa sezonalnom komponentom perioda d možemo napraviti transformaciju

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t+d}.$$

Novi niz $(\nabla_d X_t)$ neće sadržavati sezonalnu komponentu. U R-u $(\nabla_d x_t)$ dobivamo naredbom `diff(x,lag=d)`.

```
> d_4x=diff(xx,lag=4)
> ts.plot(d_4x)
```



III. Procjene u R-u

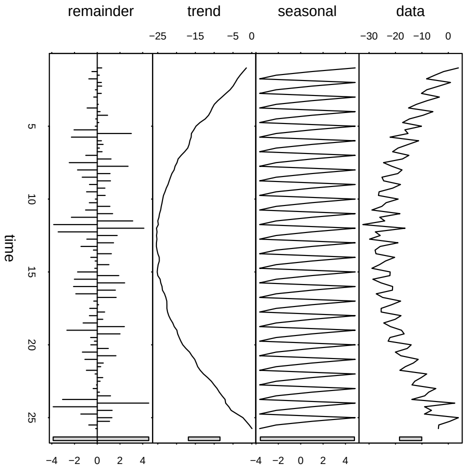
Postoje razne metode procjene komponenti vremenskog niza, jedna od njih je implementirana funkcijom `stl`. (Koristi se LOESS metoda - neparametarska lokalna polinomijalna regresija, za procjenu sezonalne komponente i trenda.)

```
> x.stl=stl(xt,"periodic")
> x.stl
 Call:
 stl(x = xt, s.window = "periodic")

Components
       seasonal        trend    remainder
 1 Q1  4.867846  -1.44873681  0.396023800
 1 Q2  0.995836  -2.29294229 -0.467391078
 1 Q3 -2.192161  -3.10257974  0.185028295
 1 Q4 -3.671522  -3.82879551 -0.741698047
 2 Q1  4.867846  -4.39355828  0.366215257
 2 Q2  0.995836  -4.98682268  0.391726502
 ---
```

Nacrtajmo rastav koji je dobiven funkcijom `stl`.

```
> plot(x.stl)
```



Do procijenjenih vrijednosti sezonalne komponente dolazimo ovako.

```
> x.sto=x.stl$time.series
> x.s=x.sto[,1]
> x.s
        Qtr1      Qtr2      Qtr3      Qtr4
1   4.867846  0.995836 -2.192161 -3.671522
2   4.867846  0.995836 -2.192161 -3.671522
3   4.867846  0.995836 -2.192161 -3.671522
----
```

IV. Analiza stacionarnog niza

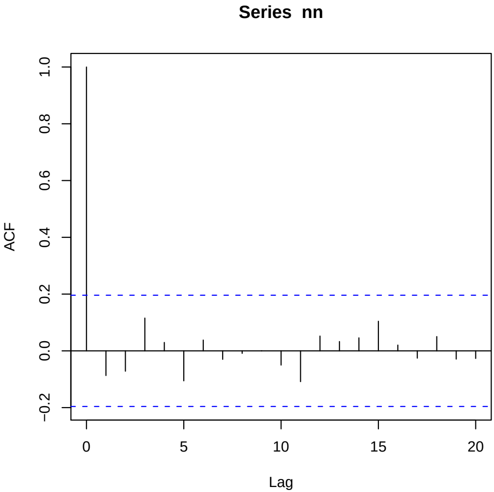
Nakon što se riješimo sezonalnosti i procijenimo trend ostaje nam analiza stacionarnog niza koji je preostao.
Želimo procijeniti autokovarijacijsku funkciju γ i autokorelacijsku funkciju ρ. Uvodimo uzoračku autokovarijacijsku funkciju za niz $(x_k)_{k=1}^n$

$$\hat{\gamma}(h) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-h}(x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}),$$

za $0 \leq h < n$. Za $h < 0$ je $\hat{\gamma}(h) := -\hat{\gamma}(h)$. Uzoračku autokorelacijsku funkciju definiramo sa

$$\hat{\rho}(h) = \hat{\gamma}(h)/\hat{\gamma}(0), \quad |h| < n.$$

Voljeli bi da je niz (Y_t) nekoreliran s očekivanjem 0 i konstantnom varijancom σ^2 - *bijeli šum* $WN(0, \sigma^2)$. Tada graf uzoračke autokorelacijske funkcije izgleda ovako.



Bilo bi dobro da bijeli šum bude Gaussovski, odnosno normalno distribuiran.
Ako uzoračka autokorelacijska funkcija sugerira da se radi o bijelom šumu, onda provedemo testove normalnosti (normalni graf, KS test i sl.)

Zadatak

Neka je `xx` realizacija vremenskog niza (X_t).

(a) Procijenite sezonalnu komponentu procedurom *stl* i uklonite ju.

(b) Procijenite trend polinomom drugog stupnja i nacrtajte preostali šum.

(c) Nacrtajte residual-fit plot ostataka, autokorelacijsku funkciju i normalni vjerojatnosni graf.