Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 16. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Promotrimo Bachelierov model financijskog tržišta, gdje je cijena dionice modelirana s

$$dS_t = \alpha dt + \sigma dB_t,\ t > 0,$$

za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, gdje je $S_0 > 0$ početna cijena dionice i kamatna stopu je $r = 0$.

(a) Odredite razdiobu slučajne varijable S_t (obzirom na $\mathbb{P}$).

(b) Pokažite da je model tržišta potpun.

(c) Izračunajte cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i dospijećem $T > 0$.

(d) Je li portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \geq 0)$

(d1) $\phi = ((-S_t^2 - \sigma^2 t, 2S_t) : t \geq 0)$

(d2) $\phi = \left(\left(-\int_0^t S_u du, t^2\right) : t \geq 0\right)$

samofinancirajući?

Zadatak 17. Promatramo BSM model financijskog tržišta s neprekidnim isplaćivanjem dividende na dionicu,

$$\begin{aligned} dR_t &= rR_t dt,\ R_0 = 1 \\ dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t - aS_t dt, \end{aligned}$$

gdje su stopa povrata $\alpha > 0$, volatilnost $\sigma > 0$, kamatna stopa $r > 0$ i stopa dividendi $a > 0$ konstantni. Odredite cijenu u trenutku t europske call opcije s datumom dospijeća T i cijenom izvršenja K.

Zadatak 18.[1] Promatramo BSM model financijskog tržišta s konstantnim koeficijentima $\alpha, \sigma, r > 0$. Odredite cijenu u trenutku $t = 0$ *down-and-out* binarne opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i barijerom $b < S_0$, $C = K1_{\{m_T > b\}}$.

[1] Zadatak se odnosi na zadnji dio gradiva koji će biti obrađen na predavanju 16.6.2021.

16. a) $S_t \sim N(S_0 + \alpha t, \sigma^2 t)$; c) $C_0 = (S_0 - K)\Phi(d) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2}$, $d = \frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}$; d1) da; d2) ne

17. vidi str 159-161 u skripti ZV.

18. $C_0 = Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{b}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$.