

Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 12. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Riješite sljedeće linearne SDJ:

(a) $dX_t = a dt + X_t dB_t, X_0 = 0,$

(b) $dX_t = (a + X_t) dB_t, X_0 = 0,$

(c) $dX_t = X_t dt + dB_t, X_0 = 0,$

(d) $dX_t = 4X_t dt + 2X_t dB_t, X_0 = 2,$

(e) $dX_t = tX_t dB_t, X_0 = 1.$

Zadatak 13. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Dokažite da je $X = (X_t : t \geq 0)$ također Brownovo gibanje ako je

(a) $X_t = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s$

(b) $X_t = \int_0^t H_s dB_s,$

pri čemu je $H = (H_t : t \geq 0)$ adaptiran proces t.d. je Lebesgueova mjera skupa $\{t \geq 0 : |H_t| \neq 1\}$ jednaka 0 $\mathbf{P}$ -gotovo sigurno.

Zadatak 14. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, $T > 0$ i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija generirana Brownovim gibanjem B . Ako je Y $\mathcal{F}_T$ -izmjeriva slučajna varijabla s konačnim očekivanjem, pokažite da postoji adaptirani proces $\theta = (\theta_t : t \in [0, T])$ t.d. je

$$Y = \mathbf{E}Y + \int_0^T \theta_t dB_t.$$

Zadatak 15. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i proces $B^* = (B_t^* : t \geq 0)$ dan s

$$B_t^* = B_t + \sin(t).$$

Odredite mjeru $\mathbb{P}^*$ obzirom na koju je B^* Brownovo gibanje.

12. (a) $X_t = a \int_0^t e^{B_t - B_s - \frac{1}{2}(t-s)} ds,$ (b) $X_t = a \left[\int_0^t e^{B_t - B_s - \frac{1}{2}(t-s)} dB_s - \int_0^t e^{B_t - B_s - \frac{1}{2}(t-s)} ds \right],$ (c) $X_t = B_t + \int_0^t e^{t-s} B_s ds,$ (d) $X_t = 2e^{2(t+B_t)},$ (e) $X_t = e^{\int_0^t s dB_s - \frac{1}{6}t^3}.$

15. Za $A \in \mathcal{F}_T$ je $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}^* \left[e^{-B_T \cos T - \int_0^T \sin t B_t dt - \frac{1}{8} \sin(2T) - \frac{T}{4}} 1_A \right].$