

Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 8. Neka je $(B_t)_{t \geq 0}$ Brownovo gibanje i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ proizvoljna subdivizija intervala $[0, T]$.

(a) Pokažite da vrijedi

$$\sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}}^2 (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = \frac{1}{3} B_T^3 - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^3 - \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2.$$

(b) Korištenjem (a) dijela i Propozicije 2.15 odredite Itôv integral

$$I_T = \int_0^T B_t^2 dB_t.$$

Dodatno, provjerite da integrand u integralu I_T zadovoljava uvjete Propozicije 2.15.

(c) Označimo s $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ sredinu intervala $[t_j, t_{j+1}]$, te definiramo

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_j^*} - B_{t_j})^2.$$

Odredite $\mathbb{E}[Q_\Pi]$, $\text{Var}(Q_\Pi)$ i $(\mathbb{P}) \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} Q_\Pi$.

(d) Stratonovičev integral Brownovog gibanja B obzirom na samog sebe definira se kao

$$SI_T = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j^*} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Korištenjem (c) dijela i izraza za Itôv integral $\int_0^T B_t dB_t$ odredite SI_T .

8. b) $I_T = \frac{1}{3} B_T^3 - \int_0^T B_t dt$, c) $\mathbb{E}[Q_\Pi] = \frac{T}{2}$, $\text{Var}(Q_\Pi) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j)^2$, $(\mathbb{P}) \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} Q_\Pi = \frac{T}{2}$, d) $SI_T = \frac{1}{2} B_T^2$.