Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Je li proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ također Brownovo gibanje, gdje je:

(b) $X_t = tB_{1/t}$, $t > 0$, $X_0 = 0$.

Uočimo prvo da je X Gaussovski proces s funkcijom očekivanja i kovarijacijskom funkcijom kao i B. To znači da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $t_1, ..., t_n$

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \overset{(D)}{=} (B_{t_1}, ..., B_{t_n}), \tag{1}$$

odnosno procesi X i B imaju jednake konačno-dimenzionalne distribucije. Ostaje pokazati (g.s.) neprekidnost trajektorija. Iz definicije i neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja slijedi da je preslikavanje $t \mapsto X_t$ neprekidno na $(0, \infty)$. Ostaje provjeriti još neprekidnost (zdesna) u 0. Ključni element u dokazu tvrdnje

$$\lim_{t\downarrow 0} X_t = 0 \text{ (g.s.)}$$

je uočiti da se događaj $\{\omega : \lim_{t\downarrow 0} X_t(\omega) = 0\}$ može zapisati kao

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{r\in\mathbb{Q}_m} \{|X_r| < \tfrac{1}{n}\},$$

gdje je $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q} \cap \langle 0, \frac{1}{m}]$. Korištenjem neprekidnosti vjerojatnosti obzirom na padajući, odnosno rastući niz događaja slijedi da je vjerojatnost gornjeg događaja jednaka

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in\mathbb{Q}_m} \{|X_r| < \tfrac{1}{n}\}\right).$$

No sada opet korištenjem neprekidnosti vjerojatnosti obzirom na padajući niz događaja iz jednake konačno-dimenzionalne distribucije procesa X i B slijedi da je

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in\mathbb{Q}_m} \{|X_r| < \tfrac{1}{n}\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in\mathbb{Q}_m} \{|B_r| < \tfrac{1}{n}\}\right). \tag{2}$$

Iz ove jednakosti sada slijedi (vraćanjem unatrag istim argumentima, samo sad za proces B) da je

$$\mathbb{P}(\lim_{t\downarrow 0} X_t = 0) = \mathbb{P}(\lim_{t\downarrow 0} B_t = 0) = 1.$$

Pokažimo još tvrdnju (2): neka je S prebrojiv skup i $(S_n)_n$ niz rastućih konačnih skupova t.d. $\cup_n S_n = S$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in S}\{|X_r| < \varepsilon\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n} \bigcap_{r\in S_n} \{|X_r| < \varepsilon\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in S_n} \{|X_r| < \varepsilon\}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in S_n} \{|B_r| < \varepsilon\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{r\in S}\{|B_r| < \varepsilon\}\right).
\end{aligned}$$