Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 1. Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje.

(a) Odredite razdiobu slučajne varijable $X = B_1 + B_2 + B_3$.

(b) Neka je $Y \sim N(0, \sigma^2)$. Izračunajte funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable Y, te $\mathbb{E}[Y^3]$ i $\mathbb{E}[Y^4]$. Neka je $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. Odredite funkciju izvodnicu momenata za Z.

(c) Neka je $W = \int_0^1 B_t^2 dt$. Dokažite da je W slučajna varijabla i izračunajte $\mathrm{Var}(W)$.

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Je li proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ također Brownovo gibanje, gdje je:

(a) $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$, $t \geq 0$, $c > 0$.

(b) $X_t = tB_{1/t}$, $t > 0$ i $X_0 = 0$.

(c) $X_t = \sqrt{t} B_1$, $t \geq 0$.

(d) $X_t = -B_t$, $t \geq 0$.

(e) $X_t = B_{3t} - B_t$, $t \geq 0$.

(f) $X_t = B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$, $T > 0$.

Zadatak 3. Neka su $B^{(1)} = (B_t^{(1)})_{t\geq 0}$ i $B^{(2)} = (B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ nezavisna Brownova gibanja. Za koje vrijednosti parametara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je proces W,

$$W_t = \alpha B_t^{(1)} + \beta B_t^{(2)}, \ t \geq 0$$

Brownovo gibanje? Objasnite

Zadatak 4. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Dokažite da je proces $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ Gaussovski (odnosno da je $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m})$ normalno distribuiran slučajni vektor za sve $m \in \mathbb{N}$ i $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$), odredite mu kovarijacijsku funkciju ($\gamma(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$), te funkciju gustoće slučajnog vektora (X_s, X_t), $0 < s < t$, gdje je

(a) $X_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1$.

(b) $X_t = e^{-\alpha t/2} B_{e^{\alpha t}}$, $t \geq 0$.

---

1. a) $X \sim N(0, 14)$, b) $\varphi_Y(\lambda) = e^{\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$, $\mathbb{E}[Y^3] = 0$, $\mathbb{E}[Y^4] = 3\sigma^4$, $\varphi_Z(\lambda) = e^{\mu\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$, (c) $\mathrm{Var}(W) = \frac{1}{3}$.
2. a) da, b) da, c) ne , d) da, e) ne, f) da.
3. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
4. a) $\gamma(s,t) = \min\{s,t\}(1 - \max\{s,t\})$, b) $\gamma(s,t) = e^{\frac{\alpha}{2}(\min\{s,t\} - \max\{s,t\})}$.