Predavanje 9 - 13.5.2020.

4.2 Osnovni teoremi određivanja cijene financijske imovine

Neka je $T > 0$ i $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$, gdje je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Promatramo neprekidni model financijskog tržišta koji se sastoji od dvije temeljne financijske imovine:

- novac koji se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \in [0,T])$ koja je $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces;
- dionica, čija vrijednost je $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces $S = (S_t : t \in [0,T])$.

Do sada smo uvijek imali pretpostavku da je kamatna stopa konstantna i jednaka r na intervalu $[0,t]$. Tu pretpostavku smo sada oslabili realnijom pretpostavkom da su kamatne stope slučajne. To znači da 1 kuna uložena u trenutku 0 vrijedi $\exp\{\int_0^t r_s\, ds\}$ kuna u trenutku t. Definiramo *proces diskontiranja*

$$D_t = e^{-\int_0^t r_s\, ds}\,. \tag{4.18}$$

Stavimo $U_t = \int_0^t r_s\, ds$. Tada je $dU_t = r_t\, dt$ i $dU_t\, dU_t = 0$. Uz funkciju $f(x) = e^{-x}$ Itôva formula daje

$$\begin{aligned} dD_t &= df(U_t) = f'(U_t)\, dU_t + \frac{1}{2} f''(U_t)\, dU_t\, dU_t \\ &= -f(U_t)\, dU_t = -r_t D_t\, dt\,, \end{aligned}$$

tj., $D = (D_t : t \in [0,T])$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$dD_t = -r_t D_t\, dt\,. \tag{4.19}$$

Uočimo da iako je D slučajan proces, kvadratna varijacija mu je nula, što znači da nije jako volatilan. Proces D imat će ulogu diskontnog faktora e^{-rt}. Diskontiranu vrijednost dionice označavat ćemo s $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t : t \in [0, T])$, gdje je $\widetilde{S}_t = D_t S_t$.

U ovom poglavlju promatrat ćemo osnovne teoreme određivanja cijena financijskih imovina u neprekidnim modelima financijskih tržišta, odnosno analogon diskretne teorije koju smo obradili na kolegiju Financijsko modeliranje 1. U tu svrhu, prvo ćemo se podsjetiti nekih ključnih pojmova i dati analogne definicije (ali sada za neprekidne modele tržišta).

Portfelj ili strategija je $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0, T])$, gdje je ϕ_t^0 količina novca (ili obveznica) u trenutku t, a ϕ_t^1 količina dionica u trenutku t. Vrijednost portfelja u trenutku t dana je s

$$V_t^\phi = \phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t,\ t \in [0, T],$$

gdje je $R_t = e^{U_t}$. S $\widetilde{V}^\phi$ označavamo proces diskontiranih vrijednosti portfelja ϕ, odnosno

$$\widetilde{V}_t^\phi = D_t V_t^\phi.$$

Definicija 4.8 *Kažemo da je portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0, T])$ samofinancirajući ako je*

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T |\phi_t^1|^2 dt < \infty \ \mathbb{P} - g.s. \tag{4.20}$$

te za sve $t \in [0, T]$

$$V_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^0 dR_s + \int_0^t \phi_s^1 dS_s \ \mathbb{P} - g.s.^1$$

Podsjetimo se i analogne karakterizacije samofinancirajućeg portfelja.

Propozicija 4.9 *Neka je ϕ adaptirani slučajni proces za koji vrijedi (4.20). Tada je ϕ samofinancirajući portfelj ako i samo ako je za svaki $t \in [0, T]$*

$$d\widetilde{V}_t^\phi = \phi_t^1 d\widetilde{S}_t \ \mathbb{P} - g.s.$$

[1] Nismo ovdje specificirali, ali pretpostavka je da su R i S Itôvi procesi t.d. su Itôvi integrali u ovoj jednakosti dobro definirani.

Dokaz: Podsjetimo se prvo SDJ za $\widetilde{S}_t$. Korištenjem Itôve formule za produkt dobijemo

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= d(D_tS_t) = dD_tS_t + D_tdS_t + dD_tdS_t \\ &= -r_tD_tS_tdt + D_tdS_t. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Odredimo sada SDJ za $\widetilde{V}^\phi = (\widetilde{V}_t^\phi : t \in [0,T])$,

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t^\phi &= d(D_tV_t^\phi) = dD_tV_t^\phi + D_tdV_t^\phi + dD_t \cdot dV_t^\phi \\ &= -r_tD_t(\phi_t^0R_t + \phi_t^1S_t)dt + D_tdV_t^\phi + 0 \\ &\overset{(4.21)}{=} -r_t\phi_t^0dt + \phi_t^1d\widetilde{S}_t - D_t\phi_t^1dS_t + D_tdV_t^\phi \\ &= \phi_t^1d\widetilde{S}_t + D_t(dV_t^\phi - \phi_t^0dR_t - \phi_t^1dS_t), \end{aligned}$$

gdje smo u trećem redu koristili da je $D_tR_t = 1$. Slijedi

$$d\widetilde{V}_t^\phi = \phi_t^1d\widetilde{S}_t \;\Leftrightarrow\; dV_t^\phi = \phi_t^0dR_t + \phi_t^1dS_t$$

$\square$

Slučajni zahtjev C u vremenu T je nenegativna $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla. Kao i u diskretnoj teoriji, želimo odrediti samofinancirajuću strategiju ϕ t.d. $V_T^\phi = C$ i $V_t^\phi \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s., odnosno *replicirajući portfelj* za C. Ako takav portfelj postoji, kažemo da je slučajni zahtjev C *dostižan*. Podsjetimo se pojmova arbitraže i potpunih financijskih tržišta.

Definicija 4.10 *Samofinancirajući portfelj ϕ je* arbitraža *ako je $V_t^\phi \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s. za sve $t \in [0,T]$, $V_0^\phi = 0$ i $\mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0$.*

Definicija 4.11 *Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je* ekvivalentna martingalna mjera *za $\mathbb{P}$ ako je $\mathbb{P}^*_{|\mathcal{F}_T} \sim \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$ i $\widetilde{S}$ je $\mathbb{P}^*$-martingal.*

S obzirom na to da su nam za određivanje cijena na financijskom tržištu potrebna samo informacije do trenutka T, ekvivalentnu martingalnu mjeru možemo promatrati kao vjerojatnosnu mjeru na manjem izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.

Propozicija 4.12 *Ako na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$, tada tržište ne dopušta arbitražu.*

Dokaz: Neka je ϕ samofinancirajući portfelj takav da je $V_t^\phi \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s. za sve $t \in [0,T]$ i $\mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0$. Kako je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna s $\mathbb{P}$, slijedi da je za sve $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{P}^*(V_t^\phi \geq 0) = 1 \text{ i } \mathbb{P}^*(V_T^\phi > 0) > 0. \tag{4.22}$$

Po Propoziciji 4.9 slijedi da je $\widetilde{V}_t^\phi$ Itôv integral u odnosu na $\widetilde{S}_t$,

$$d\widetilde{V}_t^\phi = \phi_t^1 d\widetilde{S}_t.$$

Kako je $\widetilde{S}$ $\mathbb{P}^*$-martingal, slijedi da je i $\widetilde{V}^\phi$ $\mathbb{P}^*$-martingal.[2] Stoga je

$$V_0^\phi = \widetilde{V}_0^\phi = \mathbb{E}^*[\widetilde{V}_T^\phi] \overset{(4.22)}{>} 0,$$

pa ϕ nije arbitraža. Time smo pokazali da tržište ne dopušta arbitraže. □

Kao i u diskretnom slučaju, u gornjoj propoziciji imamo ekvivalenciju. Teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 4.13 (1. fundamentalni teorem određivanja cijene imovine) *Tržište ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Od sada nadalje pretpostavljamo da na tržištu postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Što možemo reći o dostižnosti slučajnog zahtjeva C? Proces $\Pi(C) = (\Pi(C)_t : t \in [0,T])$ zovemo nearbitražna cijena za C ako je prošireni model tržišta $(R, S, \Pi(C))$, koji uz novac i dionicu kao temeljne financijske imovine sada sadrži i financijsku imovinu vrijednosti $\Pi(C)$, bez arbitraže, što je ekvivalentno tome da postoji ekvivalentna martingalna mjera na proširenom modelu. Sljedeći rezultat opisuje nearbitražne cijene slučajnog zahtjeva.

Propozicija 4.14 *(a) Ako prošireni model tržišta $(R, S, \Pi(C))$ dopušta ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{Q}$ tada je $C \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ i*

$$\widetilde{\Pi(C)}_t = D_t \Pi(C)_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_T C | \mathcal{F}_t].$$

[2] Ovu tvrdnju nismo dokazali za općeniti martingal, već samo za Brownovo gibanje, no spomenuli smo generalizaciju u skici dokaza Lévyjeve karakterizacije Brownovog gibanja.

(b) Ako je C dostižan, onda za svaku ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{Q}$ i replicirajući portfelj ϕ vrijedi

$$\widetilde{V}_t^\phi = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_T C|\mathcal{F}_t].$$

Dokaz: Dokažimo prvo dio (a). Kako je $\mathbb{Q}$ ekvivalentna martingalna mjera na proširenom tržištu, to je $\widetilde{\Pi(C)}$ $\mathbb{Q}$-martingal, pa je

$$\widetilde{\Pi(C)}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{\Pi(C)}_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_T \Pi(C)_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_T C|\mathcal{F}_t].$$

Za dokaz od (b), uočimo da za svaki replicirajući portfelj ϕ za C vrijedi

$$D_T C = \widetilde{V}_T^\phi = \widetilde{V}_0^\phi + \int_0^T \phi_s^1 d\widetilde{S}_s.$$

Stoga je

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_T C|\mathcal{F}_t] = V_0^\phi + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \phi_s^1 d\widetilde{S}_s|\mathcal{F}_t\right] = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^1 d\widetilde{S}_s = \widetilde{V}_t^\phi,$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili Propoziciju 4.9. □

Propozicija 4.15 (Karakterizacija dostižnosti) *Slučajni zahtjev $C \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$ je dostižan ako i samo ako je $\mathbb{P}^*$-martingal $M = (M_t : t \in [0,T])$ definiran s $M_t = \mathbb{E}^*[D_T C|\mathcal{F}_t]$, oblika*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s d\widetilde{S}_s,\ t \in [0,T] \tag{4.23}$$

gdje je $\theta = (\theta_t : z \in [0,T])$ neki adaptirani slučajni proces.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je C dostižan i neka je $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0,T])$ replicirajući portfelj za C. Tada je po Propoziciji 4.9 i Propoziciji 4.14

$$M_t = \mathbb{E}^*[D_T C|\mathcal{F}_t] = \widetilde{V}_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^1 d\widetilde{S}_s,$$

pa tvrdnja vrijedi uz $\theta = \phi^1$.
$\Leftarrow$ Neka je $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0,T])$ adaptiran proces definiran s

$$\phi_t^1 = \theta_t \text{ i } \phi_t^0 = M_t - D_t \theta_t S_t.$$

Za portfelj ϕ tada vrijedi da je $\widetilde{V}_t^\phi = M_t$[3]. Pokažimo da je ϕ samofinancirajući portfelj koji replicira C:

[3]Uvjerite se sami.

- Za $t \in [0,T]$ je

$$V_t^\phi = R_t \widetilde{V}_t^\phi = R_t M_t = R_t \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t] \geq 0 \ \mathbb{P}^* - \text{g.s.},$$

  jer su $R_t, D_T, C \geq 0$.

- Kako je $\widetilde{V}_t^\phi = M_t$, po (4.23) slijedi da je za $t \in [0,T]$

$$\widetilde{V}_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^1 d\widetilde{S}_s,$$

  pa je po Propoziciji 4.9 ϕ samofinancirajuća strategija.

- Konačno, kao i u prvoj točki imamo

$$\widetilde{V}_T^\phi = M_T = \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_T] = D_T C \ \Rightarrow \ V_T^\phi = C.$$

Time smo pokazali da je C dostižan. $\square$

Prisjetimo se, tržište bez arbitraže nazivamo *potpunim* ako je svaki slučajni zahtjev dostižan. Ako je tržište potpuno, lako se pokaže da tada postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Uistinu, pretpostavimo da na potpunom modelu tržišta imamo dvije ekvivalentne martingalne mjere $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$. Tada je svaka $\mathcal{F}_T$-izmjeriva nenegativna slučajna varijabla C dostižan slučajni zahtjev, pa po Propoziciji 4.14 vrijedi

$$\mathbb{E}_1[D_T C] = \widetilde{V}_0^\phi = \mathbb{E}_2[D_T C].$$

Specijalno, za $A \in \mathcal{F}_T$ definiramo $C = R_T 1_A$, pa imamo

$$\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{E}_1[D_T C] = \mathbb{E}_2[D_T C] = \mathbb{P}_2(A),$$

pa je $\mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2$. Štoviše, kao i u diskretnim modelima tržišta, vrijedi sljedeća ekvivalencija:

Teorem 4.16 (2. fundamentalni teorem određivanja cijena) *Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Tada je tržište potpuno ako i samo ako postoji jedinstvena martingalna mjera za $\mathbb{P}$.*

Napomena 4.17 Pretpostavimo da je model tržišta potpun. Tada je svaki slučajni zahtjev C dostižan. Neka je ϕ proizvoljan replicirajući portfelj za C. Tada po Propoziciji 4.14 vrijedi da je nearbitražna cijena jedinstvena i jednaka

$$\Pi(C)_t = V_t^\phi = R_t \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t] \tag{4.24}$$

4.3 BSM-model i vjerojatnost neutralna na rizik

U poglavlju 3 upoznali smo se Black-Scholes-Mertonovim modelom i odredili cijenu europske call opcije korištenjem BSM parcijalne diferencijalne jednadžbe. U ovom potpoglavlju promotrit ćemo određivanje cijena slučajnih zahtjeva u BSM modelu korištenjem Girsanovljevog teorema i fundamentalnih teorema o određivanju cijena financijskih imovina.

Neka je $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. O vremenu T mislimo kao o fiksnom završnom vremenu. Promatramo dionicu čija je cijena u diferencijalnom obliku dana s

$$dS_t = \alpha_t S_t \, dt + \sigma_t S_t \, dB_t \,, \quad 0 \leq t \leq T \,. \tag{4.25}$$

Srednja stopa povrata $\alpha = (\alpha_t : t \in [0, T])$ i volatilnost $\sigma = (\sigma_t, t \in [0, T])$ su adaptirani slučajni procesi. Pretpostavljamo da je σ_t različito od nule. Dakle, cijenu dionice modeliramo generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem (vidi Primjer 2.23). Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (4.25) dano je formulom

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sigma_s \, dB_s + \int_0^t \left(\alpha_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) ds \right\} . \tag{4.26}$$

Pretpostavimo, nadalje, da imamo adaptiran proces kamatnih stopa $r = (r_t : t \in [0, T])$, a procesi kamata R i diskontiranja D su dani kao u potpoglavlju 4.2. Sjetimo se SDJ za diskontiranu cijenu dionice (analogon Leme 3.1)

$$d\widetilde{S}_t = d(D_t S_t) = (\alpha_t - r_t) D_t S_t \, dt + \sigma_t D_t S_t \, dB_t = \sigma_t D_t S_t [\Theta_t \, dt + dB_t] \,, \tag{4.27}$$

gdje proces $\Theta = (\Theta_t : t \in [0, T])$, definiran s

$$\Theta_t = \frac{\alpha_t - r_t}{\sigma_t}, \tag{4.28}$$

zovemo *tržišna cijena rizika* (ili *Sharpeov omjer*).[4] Kao i u Primjeru 2.23, znamo da je rješenje SDJ (4.27) jednako

$$\widetilde{S}_t = D_t S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sigma_s \, dB_s + \int_0^t \left(\alpha_s - r_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) ds \right\} . \tag{4.29}$$

[4] Uočite da nam je ovdje bila potrebna pretpostavka da je volatilnost različita od nule.

Uočimo da je kod diskontirane cijene dionice srednja stopa povrata jednaka $\alpha_t - r_t$, tj., smanjena je u odnosu na nediskontiranu cijenu za r_t - kamatnu stopu na tržištu novca. Primijetimo, nadalje, da je tržišna cijena rizika Θ_t jednaka srednjoj stopi povrata na diskontiranu dionicu po stopi volatilnosti. Volatilnost diskontirane dionice jednaka je volatilnosti nediskontirane dionice.

Uvedimo sada vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ kao u Girsanovljevom teoremu uz proces Θ_t koji je tržišna cijena rizika. Pomoću procesa $B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_s \, ds$, formulu (4.27) možemo zapisati kao

$$d\widetilde{S}_t = \sigma_t D_t S_t \, dB_t^* \, . \tag{4.30}$$

Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ zovemo *vjerojatnost neutralna na rizik* ili *ekvivalentna martingalna mjera*. Drugi naziv opravdan je činjenicom da je s obzirom na $\mathbb{P}^*$, proces diskontiranih cijena dionica $\widetilde{S}$ martingal. To slijedi iz formule (4.30), jer je $\widetilde{S}$ Itôv integral s obzirom na $\mathbb{P}^*$-Brownovo gibanje B^*. Iz 1. fundamentalnog teorema o određivanju cijena imovine sada slijedi da Black-Scholes-Mertonov model ne dopušta arbitražu.[5] Uvrstimo $dB_t = -\Theta_t \, dt + dB_t^*$ u (4.25). Slijedi:

$$dS_t = r_t S_t \, dt + \sigma_t S_t \, dB_t^* \, , \tag{4.31}$$

tj., srednja stopa povrata na nediskontiranu dionicu, uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ jednaka je r_t. To opravdava naziv vjerojatnost neutralna na rizik. Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (4.31) dano je s

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \sigma_s \, dB_s^* + \int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \, ds \right\} \, . \tag{4.32}$$

Primijetimo još jednom da zamjena aktualne vjerojatnosti $\mathbb{P}$ s vjerojatnosti neutralnom na rizik $\mathbb{P}^*$ mijenja srednju stopu povrata dionice. Međutim, volatilnost dionice ostaje nepromijenjena. Volatilnost nam govori koji putovi su mogući: to su samo oni za koje log cijena dionice akumulira kvadratnu varijaciju po stopi σ_t^2 po jedinici vremena! Nakon zamjene vjerojatnosti promatramo i nadalje isti skup mogućih putova, ali uz pomaknutu vjerojatnost. Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ stavlja više težine na putove sa nižim povratom tako da smanjuje srednju stopu povrata sa α_t na stopu povrata na tržištu novca r_t.

[5] Prisjetite se da smo za pronalazak ekvivalentne martingalne mjere $\mathbb{P}^*$ koristili Girsanovljev teorem za koji je bila bitna pretpostavka $\sigma_t > 0$.

Općenito, Black-Scholes-Mertonov model ne mora biti potpun. No uz pretpostavku da je filtracija $\mathbb{F}$ generirana Brownovim gibanjem B[6], model je potpun. Da bismo to pokazali, uzmimo slučajan zahtjev C i slučajni proces $M = (M_t : t \in [0, T])$ definiran s

$$M_t = \mathbb{E}^*[D_T C \,|\, \mathcal{F}_t]$$

koji je $\mathbb{P}^*$-martingal. Po Korolaru 4.7, postoji adaptirani proces $\Gamma^* = (\Gamma_t^* : t \in [0, T])$ t.d. M ima reprezentaciju

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s^* \, dB_s^* , \quad 0 \le t \le T . \tag{4.33}$$

Nadalje, kako je $\sigma_t D_t S_t > 0$ za sve $t \in [0, T]$, iz jednadžbe (4.30) slijedi da je

$$dB_t^* = (\sigma_t D_t S_t)^{-1} \, d\widetilde{S}_t ,$$

odnosno reprezentacija (4.33) je sada ekvivalentna s

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{\Gamma_s^*}{\sigma_s D_s S_s} \, d\widetilde{S}_s , \quad 0 \le t \le T . \tag{4.34}$$

Sada po karakterizaciji dostižnosti (Propozicija 4.15) slijedi da je C dostižan slučajan zahtjev, odnosno da je BSM model potpun.

[6] $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$.