Web predavanja - Financijsko modeliranje 2

Vanja Wagner (po skripti Z. Vondraček)

Predavanje 8 - 6.5.2020.

4. Ekvivalentna martingalna mjera

U ovom poglavlju cilj nam je odrediti cijene izvedenih vrijednosnica u Black-Scholes-Mertonovom modelu koristeći ekvivalentnu martingalnu mjeru (odnosno mjeru neutralnu na rizik). Prisjetimo se, u diskretnom modelu tržišta (npr. Cox-Ross-Rubinsteinovom) se određivanje ekvivalentne martingalne mjere svodilo na rješavanje sustava jednadžbi. U neprekidnom Black-Scholes-Mertonovom modelu za određivanje ekvivalentne martingalne mjere koristit ćemo Girsanovljev teorem, koji nam daje proceduru promjene mjere za Brownovo gibanje.

4.1 Girsanovljev teorem

Za početak promotrimo jednostavnu proceduru *zamjene mjere*, kojom možemo promijeniti distribuciju slučajne varijable. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je Z nenegativna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \to [0,1]$ formulom

$$\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[1_A Z]\,, \quad A \in \mathcal{F}\,. \tag{4.1}$$

Tada je $\mathbb{P}^*$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$. Štoviše, ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada je i $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Kažemo da je $\mathbb{P}^*$ apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}$ i pišemo $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$. Ako je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$, tada njeno očekivanje možemo računati s obzirom na originalnu vjerojatnost $\mathbb{P}$, a također s obzirom na novu vjerojatnost $\mathbb{P}^*$. Za ta dva očekivanja vrijedi formula

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[XZ]\,. \tag{4.2}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$. Ako je $0 = \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[1_A Z]$, tada zbog $Z > 0$ $\mathbb{P}$-g.s., slijedi da je i $\mathbb{P}(A) = 0$. Dakle, $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$, te kažemo da su vjerojatnosti $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne. U tom slučaju vrijede relacije

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \frac{1}{Z}\, d\mathbb{P}^*\,,$$

te

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}^*\left[\frac{X}{Z}\right]\,.$$

Kažemo da je Z *Radon-Nikodymova derivacija* od $\mathbb{P}^*$ s obzirom na $\mathbb{P}$ i pišemo

$$Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\,.$$

Najvažniji primjer zamjene mjere je onaj u kojem se pomiče očekivanje normalne slučajne varijable.

Primjer 4.1 Neka je X standardna normalna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\theta \in \mathbb{R}$. Definiramo slučajnu varijablu Z formulom

$$Z = \exp\left\{-\theta X - \frac{1}{2}\theta^2\right\}\,,$$

te vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ pomoću te slučajne varijable. Stavimo $Y = X + \theta$. Uz vjerojatnost $\mathbb{P}$ je $Y \sim N(\theta, 1)$. Tvrdimo da je uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$, Y standardna normalna slučajna varijabla. Zaista, za $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[e^{\lambda Y}] &= \mathbb{E}[e^{\lambda Y} Z] \\
&= \mathbb{E}[\exp\{\lambda(X+\theta) - \theta X - \frac{1}{2}\theta^2\}] \\
&= e^{\lambda\theta - \theta^2/2}\,\mathbb{E}[e^{(\lambda-\theta)X}] \\
&= e^{\lambda\theta - \theta^2/2}\, e^{(\lambda-\theta)^2/2} \\
&= e^{\lambda^2/2}\,.
\end{aligned}$$

Dakle, zamjenom mjere promijenili smo očekivanje slučajne varijable.

U ovom odjeljku ćemo napraviti sličnu zamjenu mjere čime ćemo promijeniti srednju vrijednost cijelog slučajnog procesa (a ne samo jedne slučajne varijable). Pretpostavimo da nam je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \le t \le T)$, gdje je $T > 0$ fiksno vrijeme. Neka je Z

nenegativna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ i $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ formulom (4.1). *Proces Radon-Nikodymove derivacije* $Z = (Z_t : 0 \le t \le T)$ definira se kao

$$Z_t = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_t]\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{4.3}$$

Taj proces je martingal što se jednostavno vidi pomoću sljedećeg računa: za $0 \le s \le t \le T$,

$$\mathbb{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_s] = Z_s\,.$$

Lema 4.2 *Neka je Y $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}[YZ_t]\,. \tag{4.4}$$

Dokaz: To se vidi iz sljedećeg niza jednakosti:

$$\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[YZ \,|\, \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[YZ_t]\,.$$

$\square$

Lema 4.3 *Neka je $0 \le s \le t \le T$, te neka je Y $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}^*[Y \,|\, \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s}\,\mathbb{E}[YZ_t \,|\, \mathcal{F}_s]\,. \tag{4.5}$$

Dokaz: Desna strana je očito $\mathcal{F}_s$-izmjeriva slučajna varijabla. Stoga treba provjeriti da za sve $A \in \mathcal{F}_s$ vrijedi definicijska jednakost

$$\int_A \frac{1}{Z_s}\,\mathbb{E}[YZ_t \,|\, \mathcal{F}_s]\, d\mathbb{P}^* = \int_A Y\, d\mathbb{P}^*\,. \tag{4.6}$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{1}{Z_s}\,\mathbb{E}[YZ_t \,|\, \mathcal{F}_s]\, d\mathbb{P}^* \\
&= \mathbb{E}^*\left[1_A \frac{1}{Z_s}\,\mathbb{E}[YZ_t \,|\, \mathcal{F}_s]\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[YZ_t \,|\, \mathcal{F}_s]] \quad \text{zbog Leme 4.2} \\
&= \mathbb{E}[1_A Y Z_t] \\
&= \mathbb{E}^*[1_A Y] = \int_A Y \, d\mathbb{P}^* .
\end{aligned}
$$

□

Prije nego prijeđemo na glavni teorem ovog poglavlja, dokazat ćemo pomoćni rezultat koji nam daje karakterizaciju Brownovog gibanja kao martingala neprekidnih trajektorija. Rezultat nećemo u potpunosti dokazati, jer nismo uveli sve potrebne pojmove, ali ćemo dati intuitivnu skicu dokaza.

Teorem 4.4 *(Lévyjeva karakterizacija Brownovog gibanja) Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ martingal u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Pretpostavimo da je $M_0 = 0$, M_t ima neprekidne putove, te $\langle M \rangle_t = t$ za sve $t \geq 0$. Tada je M Brownovo gibanje.*

Skica dokaza: Pojam koji do sada nismo definirali je kvadratna varijacija martingala. To se može napraviti na sličan način kao i za Brownovo gibanje (barem za martingale s neprekidnim putovima). Slično se može definirati i stohastički (Itôv) integral s obzirom na martingal, te dokazati Itôva formula. Vrijedi sljedeće: neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ martingal s neprekidnim putovima, te neka je $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Tada vrijedi:

$$
df(t, M_t) = f_t(t, M_t)\, dt + f_x(t, M_t)\, dM_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, M_t)\, d\langle M \rangle_t . \tag{4.7}
$$

U integralnom obliku imamo, uz pretpostavku $\langle M \rangle_t = t$,

$$
\begin{aligned}
f(t, M_t) &= f(0, M_0) + \int_0^t \left(f_t(s, M_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, M_s)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t f_x(s, M_s)\, dM_s . \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Kao i u slučaju Brownovog gibanja pokazuje se da je član $\int_0^t f_x(s, M_s)\, dM(s)$ martingal. Uzimanjem očekivanja u (4.8) i korištenjem pretpostavke $M_0 = 0$ dobivamo

$$
\mathbb{E}[f(t, M_t)] = f(0,0) + \mathbb{E} \int_0^t \left(f_t(s, M_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, M_s)\right) ds . \tag{4.9}
$$

Pokažimo da M ima stacionarne, nezavisne i normalno distribuirane priraste. Time smo dokazali da je M uistinu Brownovo gibanje. Za fiksni $u \in \mathbb{R}$ neka su

$$f(t,x) = e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t}$$

i $X_t = f(t,x)$. Jednostavno se provjeri da je $f_t(t,x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,x) = 0$. Uvrštavanjem u (4.7) slijedi

$$dX_t = uX_t dM_t,$$

pa je proces $X = (X_t : t \geq 0)$ martingal. Prema tome, za $0 \leq s < t$ vrijedi da je

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s,$$

odnosno

$$\mathbb{E}\left[e^{uM_t - \frac{1}{2}u^2 t} | \mathcal{F}_s\right] = e^{uM_s - \frac{1}{2}u^2 s}.$$

Stoga, vrijedi da je

$$\mathbb{E}\left[e^{u(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s\right] = e^{-uM_s + \frac{1}{2}u^2 t} \mathbb{E}\left[e^{uM_t - \frac{1}{2}u^2 t} | \mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{1}{2}u^2(t-s)}, \qquad (4.10)$$

što znači da je funkcija izvodnica od $M_t - M_s$ jednaka

$$\mathbb{E}\left[e^{u(M_t - M_s)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{u(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s\right]\right] = e^{\frac{1}{2}u^2(t-s)}. \qquad (4.11)$$

Dakle, $M_t - M_s$ ima normalnu distribuciju s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$, odnosno M ima normalno distribuirane stacionarne priraste.

Ostaje još pokazato da su prirasti nezavisni. Pokazat ćemo nezavisnost dvaju prirasta, opći slučaj se dokaže indukcijom.[1] Neka su $0 \leq s < t$ i $u, v \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{uM_s + v(M_t - M_s)}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{uM_s + v(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{uM_s} \mathbb{E}\left[e^{v(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s\right]\right] \\
&\overset{(4.10)}{=} \mathbb{E}\left[e^{uM_s} e^{\frac{v^2}{2}(t-s)}\right] = e^{\frac{v^2}{2}(t-s)} \mathbb{E}\left[e^{uM_s}\right] \\
&\overset{(4.11)}{=} \mathbb{E}\left[e^{v(M_t - M_s)}\right] \mathbb{E}\left[e^{uM_s}\right].
\end{aligned}$$

Kako je funkcija izvodnica momenata slučajnog vektora $(M_s, M_t - M_s)$ jednaka produktu funkcija izvodnica momenata slučajnih varijabli M_s i $M_t - M_s$, slijedi da su te slučajne varijable nezavisne. □

[1] Samostalno provedite za vježbu postupak do kraja.

Teorem 4.5 *(Girsanovljev teorem) Neka je* $B = (B_t : 0 \le t \le T)$ *Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, te neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \le t \le T)$ *filtracija za to Brownovo gibanje. Neka je* $\Theta = (\Theta_t : 0 \le t \le T)$ *adaptiran slučajni proces. Definiramo*

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \Theta_u\, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2\, du\right\} \tag{4.12}$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_u\, du\,, \tag{4.13}$$

te pretpostavimo da je

$$\mathbb{E}\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2\, du < \infty\,. \tag{4.14}$$

Stavimo $Z = Z_T$*. Tada je* $\mathbb{E}Z = 1$*, te je uz vjerojatnost* $\mathbb{P}^*$ *definiranu formulom (4.1), slučajni proces* $B^* = (B_t^* : 0 \le t \le T)$ *Brownovo gibanje.*

Dokaz: Uočimo prvo da je slučajni proces B^* Itôv proces, te da je kvadratna varijacija $\langle B^* \rangle_t = t$. Formalnim računom to se vidi iz

$$dB_t^*\, dB_t^* = dB_t\, dB_t + 2\Theta_t\, dB_t\, dt + \Theta_t^2\, dt\, dt = dt\,.$$

Očito je $B_0^* = 0$, te B^* ima neprekidne trajektorije.

Po Lévyjevoj karakterizaciji Brownovog gibanja (Teorem 4.4) dovoljno je pokazati da je B^* martingal s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$.

Pokažimo najprije da je proces Z martingal s obzirom na $\mathbb{P}$. Stavimo

$$X_t = -\int_0^t \Theta_u\, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2\, du\,.$$

Tada je $Z_t = f(X_t)$ uz $f(x) = e^x$, pa po Itôvoj formuli imamo

$$\begin{aligned} dZ_t &= df(X_t) \\ &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, dX_t\, dX_t \\ &= e^{X_t}\left(-\Theta_t\, dB_t - \frac{1}{2}\Theta_t^2\, dt\right) + \frac{1}{2} e^{X_t}\, \Theta_t^2\, dt \\ &= -\Theta_t Z_t\, dB_t\,. \end{aligned}$$

odnosno, u integralnom obliku

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t \Theta_u Z_u\, dB_u\,. \tag{4.15}$$

Budući da je Itôv integral uvijek martingal, slijedi da je i Z martingal s obzirom na $\mathbb{P}$ (jer je B Brownovo gibanje s obzirom na $\mathbb{P}$).

Iz gore pokazanog, slijedi da je $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_0 = Z_0 = 1$. Kako je ujedno i $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$, slijedi da je vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ definirana s (4.1) ekvivalentna s $\mathbb{P}$ (vidi diskusiju na početku poglavlja 4.1).

Nadalje, budući da je Z martingal, za sve $t \in [0, T]$ vrijedi

$$Z_t = \mathbb{E}[Z_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_t] \,.$$

To znači da je Z proces Radon-Nikodymove derivacije opisan na početku poglavlja, pa možemo primijeniti Leme 4.2 i 4.3.

Sada pokazujemo da je $(B_t^* Z_t : t \in [0, T])$ martingal uz vjerojatnost $\mathbb{P}$. Za to koristimo Itôvu formulu za produkt:

$$\begin{aligned} d(B_t^* Z_t) &= B_t^* \, dZ_t + Z_t \, dB_t^* + dB_t^* \, dZ_t \\ &= -B_t^* \Theta_t Z_t \, dB_t + Z_t \, dB_t + Z_t \Theta_t \, dt \\ &\quad + (dB_t + \Theta_t \, dt)(-\Theta_t Z_t \, dB_t) \\ &= (-B_t^* \Theta_t + 1) Z_t \, dB_t \,, \end{aligned}$$

pa je $(B_t^* Z_t : t \in [0, T])$ Itôv integral s obzirom na B, odnosno martingal uz vjerojatnost $\mathbb{P}$.

Konačno, neka je $0 \leq s \leq t \leq T$. Iz dokazanog i iz Leme 4.3 slijedi

$$\mathbb{E}^*[B_t^* \,|\, \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \, \mathbb{E}[B_t^* Z_t \,|\, \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \, B_s^* Z_s = B_s^* \,.$$

Dakle, B^* je $\mathbb{P}^*$-martingal čime je dokaz gotov. $\square$

Cijenu financijske imovine modelirat ćemo u odnosu na obje vjerojatnosti: $\mathbb{P}$ će biti aktualna (stvarna, objektivna) vjerojatnost, dok će $\mathbb{P}^*$ biti vjerojatnost neutralna na rizik. Činjenica da su te dvije vjerojatnosti ekvivalentne znači da se obje slažu u tome što je moguće, a što je nemoguće (tj., koji putovi kretanja cijena su mogući).

Prije nego što krenemo s određivanjem cijena financijskih imovina u Black-Scholes-Mertonovom modelu, navest ćemo rezultat koji će nam omogućiti ispitivanje potpunosti tog modela.

Teorem 4.6 *(Teorem o reprezentaciji martingala) Neka je $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i neka je*

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \le t \le T)$ *filtracija* generirana tim Brownovim gibanjem. *Pretpostavimo da je* $M = (M_t : 0 \le t \le T)$ *martingal s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F}$ *i vjerojatnost* $\mathbb{P}$, *odnosno* Brownovski martingal. *Tada postoji adaptiran slučajni proces* $\Gamma = (\Gamma_t : 0 \le t \le T)$ *takav da je*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s \, dB_s \,, \quad 0 \le t \le T \,. \tag{4.16}$$

Teorem o reprezentaciji martingala tvrdi da ako je filtracija generirana Brownovim gibanjem, tada je svaki martingal u odnosu na tu filtraciju Itôv integral s obzirom na to Brownovo gibanje. Drugim riječima, ako je jedini izvor nesigurnosti na financijskom tržištu Brownovo gibanje, tada se od te nesigurnosti možemo zaštititi.

Uočimo nadalje da je pretpostavka o filtraciji u gornjem teoremu restriktivnija nego u Girsanovljevom teoremu (u kojem filtracija može biti veća od filtracije generirane Brownovim gibanjem). Ako u Girsanovljev teorem uključimo tu dodatnu restrikciju na filtraciju dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 4.7 *Neka je* $B = (B_t : 0 \le t \le T)$ *Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *i neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \le t \le T)$ *filtracija generirana tim Brownovim gibanjem. Neka je nadalje* $(\Theta_t : 0 \le t \le T)$ *adaptiran proces, definirajmo*

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left\{ -\int_0^t \Theta_u \, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 \, du \right\} , \\ B_t^* &= B_t + \int_0^t \Theta_u \, du \,, \end{aligned}$$

i pretpostavimo da je $\mathbb{E}\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 \, du < \infty$. *Stavimo* $Z = Z_T$. *Tada je* $\mathbb{E}Z = 1$, *te je uz vjerojatnost* $\mathbb{P}^*$ *definiranu s (4.1), proces* $B^* = (B_t^* : 0 \le t \le T)$ *Brownovo gibanje.*

Neka je nadalje $M^* = (M_t^* : 0 \le t \le T)$ *martingal s obzirom na* $\mathbb{P}^*$. *Tada postoji adaptirani proces* $\Gamma = (\Gamma_t^* : 0 \le t \le T)$, *takav da je*

$$M_t^* = M_0^* + \int_0^t \Gamma_s^* \, dB_s^* \,. \tag{4.17}$$

Gornji korolar nije trivijalna posljedica teorema o reprezentaciji martingala, jer je filtracija u korolaru generirana $\mathbb{P}$-Brownovim gibanjem $B = (B_t : 0 \le t \le T)$, a ne $\mathbb{P}^*$-Brownovim gibanjem $B^* = (B_t^* : 0 \le t \le T)$.