Web predavanja - Financijsko modeliranje 2

Vanja Wagner (po skripti Z. Vondraček)

Predavanje 7 - 29.4.2020.

Korištenjem Leme 3.4 i Leme 3.6 dokazanih na prošlom predavanju, dobivamo fomulu za funkciju $c(t,x)$ kojom je određena cijena europske call opcije.

Teorem 3.7 *Rješenje Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe (3.5) uz terminalni uvjet* $c(T,x) = (x-K)_+$ *dano je s*

$$c(t,x) = x\Phi(d_+(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(T-t,x))\,,\ 0 \le t < T\,, x > 0\,, \tag{3.11}$$

gdje je

$$d_\pm(\tau,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\,, \tag{3.12}$$

a Φ *je funkcija distribucije standardne normalne distribucije,*

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,.$$

Dokaz: Neka je $t \in [0,t\rangle$ i $x > 0$. Iz Leme 3.5 znamo da je funkcija

$$g(t,y) = e^{rt}c(T-t, e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)t})$$

rješenje jednadžbe provođenja uz rubni uvjet $g(0,y) = (e^{\sigma y} - K)_+$, a po Lemi 3.6 znamo da je

$$g(t,y) = \int_{-\infty}^{\infty}(e^{\sigma(y+z)} - K)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{z^2}{2t}}dz.$$

Korištenjem supstitucije $s = T-t$ i $x = e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)t}$ iz prve jednakosti za g slijedi da je

$$c(s,x) = e^{-r(T-s)}g(T-s, \tfrac{1}{\sigma}[\ln x + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-s)]),$$

što zajedno s drugom jednakosti za g daje

$$\begin{aligned}
c(s,x) &= e^{-r(T-s)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\sigma\frac{1}{\sigma}[\ln x+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-s)]+\sigma z}-K\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{z^2}{2(T-s)}}dz\\
&= e^{-r(T-s)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-s)+\sigma z}-K\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{z^2}{2(T-s)}}dz. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Uočimo da je $(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-s)+\sigma z}-K)_+>0$ ako i samo ako je $xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-s)+\sigma z}>K$, odnosno

$$z>-\tfrac{1}{\sigma}(\ln\frac{x}{K}+(r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-s))=-d_-(T-s,x)\sqrt{T-s}=:d_1.$$

Sada iz (3.13) slijedi da je

$$\begin{aligned}
c(s,x) &= \int_{d_1}^{\infty}\left(xe^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-s)+\sigma z}-e^{-r(T-s)}K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}}e^{-\frac{z^2}{2(T-s)}}dz\\
&= x\int_{d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}}e^{-\frac{z^2-2\sigma z(T-s)+\sigma^2(T-s)^2}{2(T-s)}}dz\\
&\quad - e^{-r(T-s)}K\int_{d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}}e^{-\frac{z^2}{2(T-s)}}dz\\
&= x\int_{d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}}e^{-\frac{(z-\sigma(T-s))^2}{2(T-s)}}dz\\
&\quad - e^{-r(T-s)}K\int_{d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}}e^{-\frac{z^2}{2(T-s)}}dz\\
&= x\int_{\frac{d_1-\sigma(T-s)}{\sqrt{T-s}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\\
&\quad - e^{-r(T-s)}K\int_{\frac{d_1}{\sqrt{T-s}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\\
&= x\left(1-\Phi(\tfrac{d_1-\sigma(T-s)}{\sqrt{T-s}})\right)-e^{-rt}K\left(1-\Phi(\tfrac{d_1}{\sqrt{T-s}})\right)\\
&= x\Phi(\tfrac{-d_1+\sigma(T-s)}{\sqrt{T-s}})-e^{-rt}K\Phi(\tfrac{-d_1}{\sqrt{T-s}}), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu koristili da je $1-\Phi(y)=\Phi(-y)$, $y\in\mathbb{R}$. Kako je $\frac{-d_1}{\sqrt{T-s}}=d_-(T-s,x)$ i

$$\tfrac{-d_1+\sigma(T-s)}{\sqrt{T-s}}=d_-(T-s,x)+\sigma\sqrt{T-s}=d_+(T-s,x),$$

tvrdnja teorema sada slijedi iz (3.14) $\square$

Napomena 3.8 (i) Uvedimo i notaciju

$$BSM(\tau, x; K, r, \sigma) = x\Phi(d_+(\tau, x)) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-(\tau, x)) . \tag{3.15}$$

Funkciju BSM zovemo Black-Scholes-Mertonova funkcija. U toj funkciji τ označava vrijeme do isteka opcije, a x trenutnu cijenu dionice. Parametri K, r i σ su cijena izvršenja, kamatna stopa i volatilnost. Uočite da α, srednja stopa povrata na dionicu, *ne* ulazi u formulu. Drugim riječima, cijena opcije ne ovisi o α.

(ii) Formulom (3.11) nisu definirani $c(t, x)$ za $t = T$ (zbog $\tau = T - t = 0$ u tom slučaju), te za $x = 0$ (pojavljuje se $\log x$). Međutim, te vrijednosti definirane su po neprekidnosti: $\lim_{t \to T} c(t, x) = (x - K)^+$ i $\lim_{x \downarrow 0} c(t, x) = 0$.

Sada želimo odrediti cijenu europske put opcije, čija je vrijednost na dan dospijeća jednaka $(K - S_T)^+$. Označimo vrijednost put opcije u trenutku t s $p(t, x)$ gdje je cijena dionice u trenutku t jednaka $S_t = x$. Primijetimo da za sve $x \geq 0$ vrijedi

$$x - K = (x - K)^+ - (K - x)^+ . \tag{3.16}$$

Također, podsjetimo se da je cijena forward ugovora s cijenom izvršenja K u trenutku t jednaka

$$f(t, x) = x - e^{-r(T-t)}K, \tag{3.17}$$

gdje je cijena dionice $S_t = x$. Iz jednakosti (3.16) vidimo da vrijedi $S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$ što možemo zapisati kao

$$f(T, S_T) = c(T, S_T) - p(T, S_T) .$$

Na lijevoj strani je vrijednost forward ugovora s cijenom izvršenja K na dan dospijeća T, a na desnoj razlika vrijednosti call i put opcije na dan dospijeća T. To znači da su u trenutku T sljedeća dva portfelja jednako vrijedna: (a) forward ugovor i (b) kupljena call opcija i prodana put opcija. Zato ta dva portfelja moraju biti jednako vrijedna i u svakom trenutku $t \in [0, T]$, t.j.,

$$f(t, x) = x - e^{-r(T-t)}K = c(t, x) - p(t, x) . \tag{3.18}$$

Gornja jednakost naziva se *put-call paritet*. Primjetimo da smo put-call paritet izveli samo na temelju ne postojanja arbitraže na tržištu, ne koristeći specifičnosti Black-Scholes-Mertonovog modela. U Black-Scholes-Mertonovom modelu poznata nam je funkcija $c(t,x)$, te jednostavno dobijemo da je

$$\begin{aligned} p(t,x) &= c(t,x) - x + Ke^{-r(T-t)} \\ &= x\Phi(d_+(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(T-t,x)) - x + Ke^{-r(T-t)} \\ &= x(\Phi(d_+(T-t,x)) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(d_-(T-t,x)) - 1) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_-(T-t,x)) - x\Phi(-d_+(T-t,x))\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje smo opet koristili da je $\Phi(y) - 1 = -\Phi(-y)$.

3.1.1 "Hedging" i "Grci"

Promatramo financijsko tržište na kojem imamo jednu primarnu financijsku imovinu, na primjer dionicu, čija je cijena u trenutku $t \in [0,T]$ označena sa S_t i modelirana jednadžbom (3.1). Osim u dionice moguće je ulagati ili posuđivati novac po konstantnoj kamatnoj stopi r. Također je moguće trgovati vrijednosnicama izvedenim iz primarne financijske imovine kao što su call i put opcija na tu imovinu. Promotrimo portfelj koji se sastoji od bilo koje kombinacije tih financijskih instrumenata. Vrijednost X_t takvog portfelja ovisi o vremenu t i o vrijednosti dionice $S_t = x$ u tom trenutku (te, naravno, o parametrima modela). Zato možemo pretpostaviti da je $X_t = \chi(t, S_t)$, gdje je $\chi : [0,T] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ neka funkcija.

U praksi je važno poznavati osjetljivost portfelja s obzirom na

1. promjene u cijeni primarne imovine (dionice), i

2. promjene u parametrima modela.

U prvom slučaju želimo naći mjeru izloženosti riziku, tj., kako se mijenja vrijednost portfelja u odnosu na promjenu vrijednosti dionice. Drugi slučaj se može činiti besmislenim, budući da je pretpostavka modela da su parametri konstanti. U tom slučaju misli se na osjetljivost modela na moguće krive specifikacije parametara.

Uvodimo sljedeće parcijalne derivacije funkcije χ koje imaju zajedničko ime "Grci" ("The Greeks"):

$$\Delta = \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad \text{delta}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} && \text{gama} \\
\rho &= \frac{\partial \chi}{\partial r} && \text{ro} \\
\Theta &= \frac{\partial \chi}{\partial t} && \text{theta} \\
\mathcal{V} &= \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} && \text{vega}
\end{aligned}
$$

Za portfelj koji je neosjetljiv na male promjene u odnosu na neki od parametara kažemo da je *neutralan*, odnosno preciznije, to znači da je odgovarajući "Grk" jednak nuli. Na primjer, ako je $\Delta = 0$ kažemo da je portfelj *delta neutralan*.

U sljedećoj propoziciji izračunati su "Grci" za portfelj koji se sastoji od jedne call opcije (tj. "Grci" za call opciju). Slovom n označena je funkcija gustoće standardne normalne distribucije, $n(y) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp\{-y^2/2\}$.

Propozicija 3.9 *Za europsku call opciju sa cijenom izvršenja K i danom dospijeća T vrijede sljedeće jednakosti:*

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \Phi(d_+) \\
\Gamma &= \frac{n(d_+)}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\
\rho &= K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_-) \\
\Theta &= -\frac{x\, n(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_-) \\
\mathcal{V} &= x\, n(d_+)\sqrt{T-t}\,.
\end{aligned}
$$

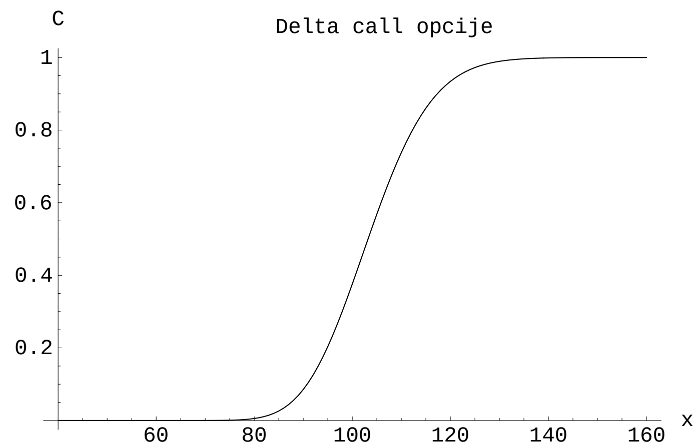
Dokaz: Direktnim, ali mukotrpnim, računom iz formule (3.11). □

Grafovi funkcija $\Delta, \Gamma, \rho, \mathcal{V}$ i Θ kao funkcija cijene dionice x dani su na Slikama 1.-5. [1]

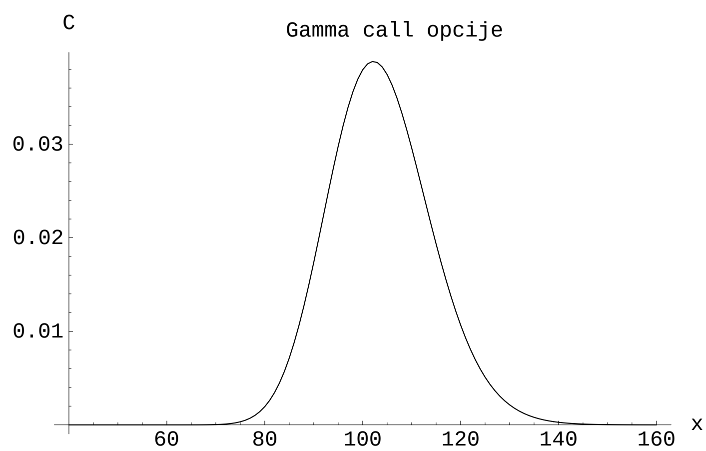
Promotrimo opet dani portfelj čija je vrijednost jednaka $X_t = \chi(t, S_t)$. Cilj je imunizirati taj portfelj u odnosu na male promjene u vrijednosti dionice. Ako je portfelj delta neutralan, tj., ako je

$$
\Delta_\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0\,,
$$

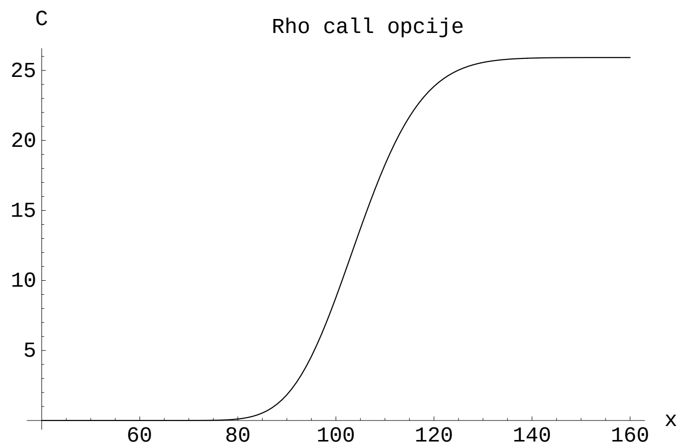
[1] Parametri modela su $r = 0.05$, $\sigma = 0.20$, cijena izvršenja $K = 105$ i vrijeme dospijeća $T = 0.25$



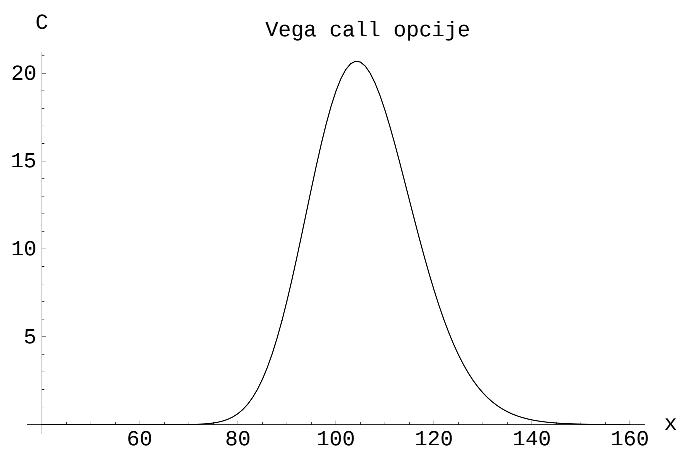
Slika 3.1: Delta call opcije



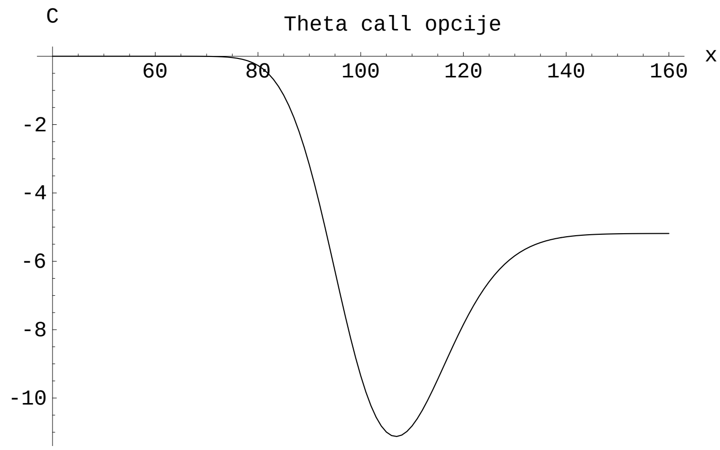
Slika 3.2: Gama call opcije



Slika 3.3: Ro call opcije



Slika 3.4: vega call opcije



Slika 3.5: Theta call opcije

tada smo gotovi. Što ako portfelj nije delta neutralan? Možemo li ga učiniti delta neutralnim? Jedan način je da prodamo cijeli portfelj i novac stavimo u banku (očito taj novi portfelj nije više nimalo osjetljiv na promjene cijene dionice). No, tako nešto najčešće nije praktički moguće.

Druga, zanimljivija mogućnost je portfelju dodati izvedenicu, na primjer opciju na dionicu. Budući da je cijena izvedenica u potpunosti korelirana s cijenom dionice, razumno je očekivati da na taj način možemo stvoriti delta neutralan portfelj. Označimo sa $f(t,x)$ funkciju cijene dodane izvedenice. To znači da je cijena izvedenice u trenutku t jednaka $f(t,S_t)$. Na primjer, ako je izvedenica call opcija, tada je $f(t,x) = c(t,x)$. Pretpostavimo da smo portfelju dodali ζ jedinica izvedenice. Vrijednost novog portfelja bit će jednaka $\nu(t,S_t)$ gdje je

$$\nu(t,x) = \chi(t,x) + \zeta f(t,x)\,.$$

Želimo naći ζ takav da je $\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$. To daje jednadžbu

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \zeta \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,$$

s očitim rješenjem

$$\zeta = -\frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\Delta_\chi}{\Delta_f}\,.$$

Primjer 3.10 *Pretpostavimo da smo prodali izvedenicu čija je cijena dana funkcijom $f(t,x)$, te se želimo zaštiti od proizašlih obaveza, i to tako da koristimo financijsku imovinu na koju je izvedenica napisana (na primjer dionicu). Koliko dionica trebamo imati po prodanoj izvedenici? Neka je ζ taj broj. Tada će se naš portfelj sastojati od -1 jedinice izvedenice i ζ dionica, tj., vrijednost portfelja je $-f(t,x)+\zeta\cdot x$. Deriviranjem po x i izjednačavanjem s nulom slijedi*

$$\zeta = \frac{\partial f}{\partial x} = \Delta_f\,.$$

Važno je uočiti da delta hedge vrijedi samo za male promjene cijene dionice, pa zato samo za kratko vrijeme. Kako vrijeme prolazi, vrijednosti od x (cijena dionice) i t (vrijeme) se mijenjaju, a naša zaštita (hedge) koristi staru, sada netočnu vrijednost od delta. U praksi se stoga provodi diskretno rebalansiranje delta zaštite koje na gornjem primjeru može izgledati ovako:

- Prodaj jednu jedinicu izvedenice u trenutku $t=0$ po cijeni $f(0,x)$.
- Izračunaj Δ, te kupi Δ dionica. Za to upotrijebi novac dobiven prodajom izvedenice, te ako je potrebno posudi novac iz banke.
- Čekaj jedan dan (tjedan, minutu,...). Cijena dionice se promijenila i tvoj stari Δ više nije točan.
- Izračunaj novu vrijednost od Δ i prilagodi prema tome novu poziciju u dionicama. Dobiveni (ili potreban) novac uloži u banku (ili posudi iz banke).
- Ponavljaj tu proceduru do dana dospijeća T.
- Na taj način će vrijednost tvojih dionica i novca biti približno jednaka vrijednosti izvedenice.

Ukoliko se rebalansiranje portfelja vrši neprekidno, vrijednost portfelja na dan dospijeća bit će jednaka vrijednosti izvedenice. To i jeste ideja replicirajućeg portfelja.

U diskretnoj vremenskoj shemi koja je gore opisana postavlja se pitanje koliko često treba prilagođavati portfelj. Prerijetko znači veliko odstupanje od delta neutralnog portfelja. Prečesto dovodi do velikih troškova transakcije (to je praktičan problem - u modelu *ne* postoje troškovi transakcije). Razlog zašto portfelj treba prilagođavati je taj da se Δ mijenja kako se mijenja cijena dionice. Osjetljivost od Δ s obzirom na x, cijenu dionice, dana je s $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$. Ako je Γ velik, treba često rebalansirati portfelj. S druge strane, mali Γ znači da ćemo dulje vrijeme zadržati delta hedge. Stoga je preporučljivo formirati portfelj koji je, uz to što je delta neutralan, također i *gama neutralan*.

Uočimo da za portfelj koji se sastoji od jedne dionice imamo $\Delta_S = 1$, te $\Gamma_S = 0$. Činjenica da je gama dionice jednaka nuli znači da promjena broja dionica u portfelju ne može utjecati na gama cijelog portfelja. To vodi do sljedeće konstrukcije portfelja koji je i delta i gama neutralan. Pretpostavimo da imamo portfelj čija je vrijednost dana funkcijom $\chi(t, x)$, te ga želimo modificirati tako da postane delta i gama neutralan. Prvi korak je da mu dodamo izvedenicu s cijenom $f(t, x)$ tako da postane gama neutralan. Zatim dodamo (ili oduzmemo) izvjestan broj dionica tako da portfelj postane i delta neutralan. Uočimo da promjena broja dionica neće narušiti gama neutralnost portfelja. Formalno, neka je ζ_f dodani broj izvedenica, te ζ_x dodani broj dionica. Vrijednost novog portfelja je

$$\nu(t, x) = \chi(t, x) + \zeta_f \cdot f(t, x) + \zeta_x \cdot x\,.$$

Izjednačavanjem prve i druge parcijalne derivacije od $\nu(t, x)$ po x s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} \Delta_\chi + \zeta_f \Delta_f + \zeta_x &= 0\,, \\ \Gamma_\chi + \zeta_f \Gamma_f &= 0\,, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\begin{aligned} \zeta_f &= -\frac{\Gamma_\chi}{\Gamma_f}\,, \\ \zeta_x &= \frac{\Delta_f \Gamma_\chi}{\Gamma_f} - \Delta_\chi\,. \end{aligned}$$

Drugi način kako formirati portfelj koji je i delta i gama neutralan, je dodavanje dva različita tipa izvedenica portfelju. To mogu biti, na primjer, dvije call opcije s različitim danima dospijeća ili s različitim cijenama izvršenja. Označimo zbog jednostavnosti te izvedenice sa f, odnosno g. Neka su $f(t, x)$ i $g(t, x)$ funkcije koje daju cijenu tih izvedenica u trenutku t ako je cijena dionice $S_t = x$. Pretpostavimo da portfelj ima ζ_f, odnosno ζ_g tih izvedenica. Vrijednost novog portfelja je

$$\nu(t, x) = \chi(t, x) + \zeta_f f(t, x) + \zeta_g g(t, x)\,.$$

Izabiremo ζ_f i ζ_g tako da delta i gama novog portfelja budu jednaki nula, tj., tako da vrijede jednadžbe

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = 0\,.$$

Odavde slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \Delta_\chi + \zeta_f \Delta_f + \zeta_g \Delta_g &= 0\,, \\ \Gamma_\chi + \zeta_f \Gamma_f + \zeta_g \Gamma_g &= 0\,, \end{aligned}$$

koji je jednostavno riješiti.