Web predavanja - Financijsko modeliranje 2

Vanja Wagner (po skripti Z. Vondraček)

Predavanje 6 - 22.4.2020.

3. Black-Scholes-Mertonova jednadžba

3.1 Black-Scholes-Mertonov model

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Promotrimo financijsko tržište na kojem postoje dva financijska instrumenta:

- Prvi instrument je novac koji se ukamaćuje po (neprekidnoj) kamatnoj stopi r (jednakoj za posuđivanje i ulaganje). To znači da iznos S_0^0 uložen u trenutku 0 vrijedi $S_t^0 = e^{rt}S_0$ u trenutku t. Model se može generalizirati tako da kamatna stopa bude promjenjiva (čak i slučajna). Uz promjenjivu kamatnu stopu $r : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, iznos S_0^0 uložen u trenutku 0, u trenutku t vrijedi

$$S_t^0 = S_0^0 e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

- Drugi financijski instrument je dionica čiju cijenu $S = (S_t : t \geq 0)$ modeliramo pomoću geometrijskog Brownovog gibanja:

$$dS_t = \alpha S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \,. \tag{3.1}$$

  Podsjetimo se da je α srednja stopa povrata, a σ volatilnost dionice.

Pretpostavimo da u trenutku t investitor ima portfelj čija je vrijednost $X = (X_t : t \geq 0)$. Nadalje pretpostavimo da investitor u trenutku t drži Δ_t

dionica. Pozicija Δ_t (odnosno broj dionica Δ_t) može biti slučajna, ali mora biti adaptirana obzirom na Brownovsku filtraciju $\mathbb{F}$. Ostatak vrijednosti portfelja, $X_t - \Delta_t S_t$, uložen je u tržište novca.

Odredimo heuristički SDJ koja opisuje kretanje vrijednosti portfelja X. Pogledajmo promjenu vrijednosti portfelja dX_t od trenutka t do trenutka $t+\Delta t$. Promjena vrijednosti portfelja posljedica je promjene vrijednosti dionice, koja doprinosi $\Delta_t\,(S_{t+\Delta t} - S_t)$, te zarađenoj kamati na $X_t - \Delta_t S_t$ koja je jednaka $(X_t - \Delta_t S_t)(e^{r\Delta t} - 1)$. To možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t &= \Delta_t\,(S_{t+\Delta t} - S_t) + (X_t - \Delta_t S_t)(e^{r\Delta t} - 1)\\ &= \Delta_t\,(S_{t+\Delta t} - S_t) + (X_t - \Delta_t S_t)\frac{e^{r\Delta t} - 1}{\Delta t}\Delta t.\end{aligned}$$

Puštanjem $\Delta t \to 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta_t\,dS_t + r(X_t - \Delta_t S_t)\,dt\\ &\overset{(3.1)}{=} \Delta_t(\alpha S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t) + r(X_t - \Delta_t S_t)\,dt\\ &= rX_t\,dt + \Delta_t(\alpha - r)S_t\,dt + \Delta_t\sigma S_t\,dB_t\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Članove koji se pojavljuju u (3.2) interpretiramo na sljedeći način:

(i) srednja stopa povrata r na portfelj, koja se vidi iz člana $rX_t\,dt$,

(ii) premija za rizik $\alpha - r$ za investiranje u (rizičnu) dionicu, koja se vidi iz člana $\Delta_t(\alpha - r)S_t\,dt$, i

(iii) volatilan član proporcionalan veličini investicije u dionicu, $\Delta_t\sigma S_t\,dB_t$.

U ovom se modelu svođenje na sadašnju vrijednost provodi preko diskontnog faktora e^{-rt}. Često ćemo promatrati diskontiranu vrijednost dionice $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ i diskontiranu vrijednost portfelja $\widetilde{X}_t = e^{-rt}X_t$. Želimo izvesti stohastičke diferencijalne jednadžbe za te diskontirane vrijednosti.

Lema 3.1 *Za diskontiranu cijenu dionice $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t : t \geq 0)$ vrijedi*

$$d\widetilde{S}_t = (\alpha - r)\widetilde{S}_t\,dt + \sigma\widetilde{S}_t\,dB_t\,, \tag{3.3}$$

a za diskontiranu vrijednost portfelja $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t : t \geq 0)$

$$d\widetilde{X}_t = \Delta_t\,d\widetilde{S}_t. \tag{3.4}$$

Dokaz: Primjenjujemo Itôvu formulu s funkcijom $f(t,x) = e^{-rt}x$, redom na Itôve procese S i X. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}S_t) &= df(t,S_t) \\
&= f_t(t,S_t)\,dt + f_x(t,S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t,S_t)\,dS_t\,dS_t \\
&= -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}\,dS_t \\
&= (\alpha - r)e^{-rt}S_t\,dt + \sigma e^{-rt}S_t\,dB_t\,,
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}X_t) &= df(t,X_t) \\
&= f_t(t,X_t)\,dt + f_x(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t,X_t)\,dX_t\,dX_t \\
&= -re^{-rt}X_t\,dt + e^{-rt}\,dX_t \\
&= -re^{-rt}X_t\,dt + e^{-rt}(rX_t\,dt + \Delta_t(\alpha - r)S_t\,dt + \Delta_t\sigma S_t\,dB_t) \\
&= \Delta_t(\alpha - r)e^{-rt}S_t\,dt + \Delta_t\sigma e^{-rt}S_t\,dB_t \\
&= \Delta_t\,d(e^{-rt}S_t).
\end{aligned}$$

□

Usporedimo li (3.1) sa (3.3), vidimo da diskontiranje cijene dionice smanjuje srednju stopu povrata sa α na $\alpha - r$. Usporedimo li (3.2) sa (3.4), vidimo da diskontiranje vrijednosti portfelja uklanja stopu povrata r: promjena diskontirane vrijednosti portfelja posljedica je samo promjene diskontirane vrijednosti dionice.

3.2 Slučajni zahtjevu u BSM modelu

Osnovna ideja određivanja cijena dostižnih slučajnih zahtjeva ista je kao i u diskretnom slučaju. Želimo naći portfelj čija je vrijednost X_t u svakom trenutku $t \in [0,T]$ jednaka cijeni slučajnog zahtjeva $C_t = g(t,S_t)$ u trenutku t. Funkcija $g(t,x)$ je deterministička: $g : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$. Ono što je slučajno je cijena dionice S_t u trenutku t. Zato je slučajna i vrijednost slučajnog zahtjeva $g(t,S_t)$ u trenutku t. Primijetimo da je $(g(t,S_t) : 0 \leq t \leq T)$ slučajni proces. Sljedeći rezultat daje nam vezu između funkcije g koja određuje cijenu slučajnog zahtjeva i pripadnog replicirajućeg portfelja.

Propozicija 3.2 *Neka je* $X = (X_t : t \geq 0)$ *vrijednost portfelja danog SDJ* (3.2) *i pretpostavimo da funkcija* $g \in C^{1,2}(\langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle)$ *zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:*

$$rg(t,x) = g_t(t,x) + rxg_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 g_{xx}(t,x), \qquad t, x \geq 0. \tag{3.5}$$

Tada vrijedi

$$\Delta_t = g_x(t, S_t) \text{ } i \text{ } X_0 = g(0, S_0) \quad \Leftrightarrow \qquad X_t = g(t, S_t),\ t \geq 0.$$

Dokaz: Uočimo da je $X_t = g(t, S_t)$ ako i samo ako je $X_0 = g(0, S_0)$ i

$$dX_t = dg(t, S_t)\,. \tag{3.6}$$

Za određivanje diferencijala od $g(t, S_t)$ koristimo Itôvu formulu,

$$\begin{aligned}
& dg(t, S_t) \\
&= g_t(t,S_t)\,dt + g_x(t,S_t)\,dS_t + \frac{1}{2} g_{xx}(t,S_t)\,dS_t\,dS_t \\
&= g_t(t,S_t)\,dt + g_x(t,S_t)(\alpha S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t) \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\,dt \\
&= \left[g_t(t,S_t) + \alpha S_t g_x(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 g_{xx}(t,S_t)\right] dt \\
&\quad + \sigma S_t g_x(t,S_t)\,dB_t \\
&= \left[g_t(t,S_t) + r S_t g_x(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 g_{xx}(t,S_t)\right] dt \\
&\quad + (\alpha - r) S_t g_x(t,S_t) dt + \sigma S_t g_x(t,S_t)\,dB_t \\
&= rg(t,S_t)dt + (\alpha - r) S_t g_x(t,S_t) dt + \sigma S_t g_x(t,S_t)\,dB_t, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili (3.5). Sada iz jednadžbi (3.2) i (3.7) slijedi da (3.6) vrijedi ako i samo ako je $\Delta_t = g_x(t, S_t)$. □

Napomena 3.3 Uočimo da gornji teorem vrijedi i na konačnim vremenskim intervalima. Neka je $T > 0$ i neka funkcija $g \in C^{1,2}(\langle 0, T\rangle \times \langle 0, \infty\rangle)$ zadovoljava (3.5) za $t \in \langle 0, T\rangle$. Ako je $\Delta_t = g_x(t, S_t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$ i $X_0 = g(0, S_0)$, jasno je da za $t \in [0,T\rangle$ vrijedi da je $X_t = g(t, S_t)$. No tvrdnja vrijedi i za $t = T$ zbog neprekidnosti funkcije g i procesa X i S. Naime,

$$X_T = \lim_{t \uparrow T} X_t = \lim_{t \uparrow T} g(t, S_t) = g(T, S_T).$$

Također, uočite da uvjet $X_0 = g(0, S_0)$ možemo zamijeniti s drugim rubnim uvjetom $X_T = g(T, S_T)$.

Primjer 3.4 Podsjetimo se, *forward ugovor* s cijenom izvršenja K obavezuje na kupnju jedne dionice na dan dospijeća T po cijeni K. Na dan dospijeća je vrijednost forward ugovora jednaka $C^{fw} = S_T - K$. Neka $C_t^{fw} = f(t,x)$ označava vrijednost forward ugovora u trenutku $t \in [0,T]$ ukoliko je cijena dionice u trenutku t jednaka $S_t = x$. Cilj nam je izračunati $f(t,x)$. Da bismo to izračunali, postavimo se u poziciju agenta koji je prodao takav forward ugovor za cijenu F. U trenutku $t = 0$ takav agent formira portfelj koji se sastoji od jedne dionice čija je cijena S_0. Razliku $S_0 - F$ posudi na tržištu novca po kamatnoj stopi r. Agent ne mijenja portfelj kroz cijelo vrijeme trajanja forward ugovora. U trenutku T, agent i dalje ima jednu dionicu, a vrijednost posuđenog novca je sada $e^{rT}(S_0 - F)$. Na dan dospijeća agent mora kupcu forward ugovora prodati dionicu za vrijednost K. Cijena F mora biti određena tako da ne postoji mogućnost arbitraže. To će biti tako samo u slučaju da vrijedi $e^{rT}(S_0 - F) = K$, t.j., obaveza agenta jednaka je cijeni koju će dobiti za dionicu. Odavde slijedi da je $F = S_0 - e^{-rT}K$. Na sličan način se pokazuje da je

$$f(t,x) = x - e^{-r(T-t)}K\,. \tag{3.8}$$

Provjerite da funkcija $f(t,x)$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu diferencijalnu jednadžbu (3.5), te da je $f(T, S_T) = C^{fw}$. Također, vidimo da za pripadni hedging portfelj vrijedi da je $\Delta_t = f_x(t, S_t) = 1$.

Kolika mora biti cijena izvršenja K da bi vrijednost forward ugovora u trenutku $t = 0$ bila jednaka nuli? Očito mora vrijediti $0 = F = S_0 - e^{-rT}K$, otkuda $K = e^{rT}S_0$. Tu vrijednost nazivamo *forward cijenom dionice* u trenutku $t = 0$. Na sličan način možemo definirati forward cijenu dionice u trenutku t kao vrijednost K uz koju je vrijednost forward ugovora u trenutku t jednak nuli, t.j., onaj K za koji je $0 = f(t, S_t) = S_t - e^{-r(T-t)}K$. Slijedi da je forward cijena u trenutku t jednaka

$$\mathrm{For}(t) = e^{r(T-t)}S_t\,. \tag{3.9}$$

Forward cijena dionice *nije* vrijednost forward ugovora. To je iznos cijene izvršenja K uz koji je vrijednost forward ugovora jednaka nuli. Promotrimo situaciju u trenutku $t = 0$. Neka je cijena izvršenja forward ugovora K jednaka $\mathrm{For}(0) = e^{rT}S_0$. Vrijednost forward ugovora je u trenutku $t = 0$ jednaka nuli. Međutim, vrijednost forward ugovora se mijenja kako vrijeme prolazi. U trenutku $t \in [0, T]$ ta vrijednost je jednaka

$$f(t, S_t) = S_t - e^{rt}S_0\,.$$

Promotrimo sada europsku call opciju s danom dospijeća $T > 0$ i cijenom izvršenja $K > 0$. Black, Scholes i Merton rezonirali su da vrijednost opcije u trenutku t ovisi o vremenu t (preciznije o preostalom vremenu $T - t$ do isteka opcije), o vrijednosti dionice u trenutku t, te naravno, o parametrima modela r i σ. Označimo zato sa $c(t, x)$ vrijednost call opcije u trenutku t ako je cijena dionice u tom trenutku $S_t = x$ (parametri r i σ su izostavljeni, jer se ne mijenjaju tijekom trajanja opcije). Cilj nam je izračunati funkciju $c(t, x)$, korištenjem pripadnog replicirajućeg portfelja. Iz Propozicije 3.2 i napomene nakon nje, slijedi da tražimo funkciju $c(t, x)$ koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (3.5) uz terminalni uvjet $c(T, x) = (x-K)_+$.

Lema 3.5 *Funkcija* $g(t, x) = e^{rt}c(T-t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t})$ *rješava jednadžbu provođenja*

$$\begin{cases} g_t(t, y) = \frac{1}{2}g_{yy}(t, y), & t, y > 0 \\ g(0, y) = (e^{\sigma y} - K)_+ & . \end{cases} \tag{3.10}$$

Dokaz: Tvrdnju provjerimo uvrštavanjem rješenja u jednadžbu (3.10). Deriviranjem izraza za g po t dobijemo

$$\begin{aligned} g_t(t, y) &= re^{rt}c(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t}) - e^{rt}c_t(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t}) \\ &\quad + e^{rt}c_x(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t})(\tfrac{\sigma^2}{2} - r)e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t} \\ &\overset{(3.5)}{=} \tfrac{1}{2}e^{rt}\sigma^2x^2c_{xx}(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t}) + \tfrac{1}{2}e^{rt}\sigma^2xc_x(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t}). \end{aligned}$$

S druge strane

$$g_y(t, y) = e^{rt}c_x(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t})\sigma e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t},$$

pa je

$$g_{yy}(t, y) = e^{rt}c_{xx}(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t})\sigma^2e^{2\sigma y+2(\frac{\sigma^2}{2}-r)t} + e^{rt}c_x(T - t, e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t})\sigma^2e^{\sigma y+(\frac{\sigma^2}{2}-r)t}.$$

Tvrdnja sada slijedi iz $g(0,y) = c(T, e^{\sigma y}) = (e^{\sigma y} - K)_+$. □

Preostaje nam još odrediti rješenje jednadžbe provođenja.

Lema 3.6 *Jednadžba provođenja*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \frac{1}{2} u_{xx}(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases},$$

ima rješenje oblika $u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(x-z)^2}{2t}} dz$.

Dokaz: Dokaz ćemo provesti za dovoljno glatku funkcije u_0. Kako je $x + B_t \sim N(x,t)$ za svaki $t, x > 0$ slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(x-z)^2}{2t}} dz = \mathbb{E}[u_0(x + B_t)],$$

stoga provjeravamo da je funkcija $u(t,x) = \mathbb{E}[u_0(x + B_t)]$ rješenje danog sustava. Uz oznaku $f(y) = u_0(x + y)$, slijedi da je $u(t,x) = \mathbb{E}[f(B_t)]$. Da bismo odredili $u_t(t,x) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}[f(B_t)]$ koristimo prvo Itôvu formulu za $f(B_t)$,

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} u(t,x) = \mathbb{E}[f(B_t)] &= u_0(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t f'(B_s) dB_s\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t f''(B_s) ds\right] \\ &= u_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[f''(B_s)] ds \end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da je očekivanje Itôvog integrala jednako 0. Sada je

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \mathbb{E}[f''(B_s)] ds = \frac{1}{2}\mathbb{E}[f''(B_t)] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\mathbb{E}[u_0(x + B_t)] \\ &= \frac{1}{2} u_{xx}(t,x). \end{aligned}$$

Kako je $u(0,x) = \mathbb{E}[u_0(x + B_0)] = u_0(x)$, tražena tvrdnja je dokazana. □