Predavanje 5 - 15.4.2020.

Primjer 2.23 *(Generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje)* Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija, te neka su $\alpha = (\alpha_t : t \geq 0)$ i $\sigma = (\sigma_t : t \geq 0)$ adaptirani procesi t.d. $\sigma \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T] \times \Omega)$ i $\int_0^t |\alpha_s| ds < \infty$ za svaki $t \geq 0$. Definiramo Itôv proces

$$X_t = \int_0^t \sigma_s \, dB_s + \int_0^t \left(\alpha_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds \,, \tag{2.34}$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$dX_t = \sigma_t \, dB_t + \left(\alpha_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt \,.$$

Vrijedi

$$dX_t \, dX_t = \sigma_t^2 \, dB_t \, dB_t = \sigma_t^2 \, dt \,.$$

Neka je $S_0 > 0$ realan broj i $f(x) = S_0 e^x$. Definiramo proces $S = (S_t : t \geq 0)$ kao $S_t = f(X_t)$. Kako je $f'(x) = f''(x) = S(0)e^x$ iz Itôve formule dobivamo

$$\begin{aligned} dS_t = df(X_t) &= f'(X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \, dX_t \, dX_t \\ &= S_0 e^{X_t} \, dX_t + \frac{1}{2} S_0 e^{X_t} \, dX_t \, dX_t \\ &= S_t \, dX_t + \frac{1}{2} S_t \, dX_t \, dX_t \\ &= \alpha_t S_t \, dt + \sigma_t S_t \, dB_t \,, \end{aligned} \tag{2.35}$$

odnosno zapisano u integralnom obliku

$$S_t = \int_0^t \alpha_s S_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 S_S dB_s.$$

Iz jednadžbe (2.35) vidimo da cijena imovine S_t ima trenutnu srednju stopu povrata α_t i volatilnost σ_t. I trenutna srednja stopa povrata i volatilnost mogu se mijenjati kroz vrijeme.

Proces S zovemo *generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje* i predstavlja najopćenitiji model kretanja cijena financijske imovine koje je neprekidno, pozitivno, i ima jedan izvor nesigurnosti (Brownovo gibanje B). Usprkos tome što model pokreće Brownovo gibanje, distribucija od S ne mora biti log-normalna. U slučaju konstantnih neslučajnih α i σ, gornji model svodi se na *geometrijsko Brownovo gibanje* i log-normalnu razdiobu.

Pretpostavimo da su α i σ konstantni i neslučajni. Tada iz formule (2.34) slijedi

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right) t\right\}\,, \tag{2.36}$$

a diferencijalni oblik (2.35) na

$$dS_t = \alpha S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t\,.$$

Pretpostavimo na trenutak da je $\alpha = 0$. Tada S_t zadovoljava $dS_t = \sigma S_t\, dB_t$. Iz desne strane vidi se da je u tom slučaju

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\}$$

martingal (vidi i Zad 6). U općem slučaju konstantnog α, iz (2.36) imamo

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\} e^{\alpha t}\,.$$

Budući da je zbog martingalnosti $\mathbb{E}\exp\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\} = 1$, dobivamo da je $\mathbb{E}S_t = \mathbb{E}S_0 e^{\alpha t}$. To znači da je srednja stopa povrata od S jednaka α.

Za nekonstantnu volatilnost σ na isti način zaključujemo da je

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds\right\} \tag{2.37}$$

martingal.

Sljedeći rezultat daje nam neke dovoljne uvjete pod kojima S ima log-normalnu razdiobu.

Teorem 2.24 *(Itôv integral za deterministički integrand) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ neslučajna funkcija vremena t.d. $\int_0^t f^2(s) ds < \infty$ za svaki $t > 0$. Definiramo $I_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$. Tada je za svaki $t \geq 0$ slučajna varijabla I_t normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t f(s)\, ds$.*

Dokaz: Uočimo da je Itôv integral $I = (I_t : t \geq 0)$ dobro definiran s obzirom na to da je $f \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$. Pri tome funkciju f promatramo kao funkciju $f : [0, \infty\rangle \times \Omega \to \mathbb{R}$ definiranu kao $f(t, \omega) := f(t)$. Stoga je proces I martingal za koji je $I_0 = 0$, pa odmah slijedi da je $\mathbb{E} I_t = \mathbb{E} I_0 = 0$. Varijanca od I_t izračunata je u Teoremu 2.11 (c):

$$\text{Var} I_t = \mathbb{E} I_t^2 = \mathbb{E} \int_0^t f^2(s)\, ds = \int_0^t f^2(s)\, ds\,,$$

jer je f neslučajna funkcija.

Preostaje dokazati da je I_t normalno distribuirana. To ćemo pokazati računanjem funkcije izvodnice momenata slučajne varijable I_t, $\mathbb{E} e^{u I_t}$, $u \in \mathbb{R}$. Stavimo u formulu (2.37) $\sigma_s = u f(s)$ i $S_0 = 1$. Slijedi da je proces

$$\exp\left\{ \int_0^t u f(s)\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (u f(s))^2\, ds \right\}$$

martingal koji je u trenutku $t = 0$ jednak 1. Slijedi

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{ \int_0^t u f(s)\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (u f(s))^2\, ds \right\} \right] = 1\,. \tag{2.38}$$

Gornju formulu možemo napisati u obliku

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{ u I_t - \frac{1}{2} u^2 \int_0^t f^2(s)\, ds \right\} \right] = 1\,,$$

odnosno,

$$\mathbb{E} e^{u I_t} = \mathbb{E}\left[\exp\left\{ \frac{1}{2} u^2 \int_0^t f^2(s)\, ds \right\} \right]\,, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

Na desnoj strani je funkcija izvodnica momenata normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t f^2(s)\, ds$. $\square$

Primjer 2.25 *(Vasicekov model kamatnih stopa)* Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Vasicekov model procesa kamatnih stopa $R = (R_t : t \geq 0)$ dan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)\, dt + \sigma dB_t \,, t \geq 0, \tag{2.39}$$

gdje su $\alpha, \beta, \sigma > 0$. Isto kao u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi, potrebno je pokazati da stohastička diferencijalna jednadžba ima rješenje. To se pokazuje bilo pozivanjem na opću teoriju, bilo neposrednim rješavanjem jednadžbe. Mi ćemo napisati formulu za proces R_t, te provjeriti da zadovoljava gornju jednadžbu.

Stavimo

$$R_t = e^{-\beta t} R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s}\, dB_s \,. \tag{2.40}$$

Pomoću Itôve formule računamo $f(t, X_t)$ za $X_t = \int_0^t e^{\beta s}\, dB_s$ i

$$f(t,x) = e^{-\beta t} R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} x \,.$$

Uočimo da $f(t, X_t)$ zadovoljava (2.40). Potrebne su nam sljedeće parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} f_t(t,x) &= -\beta e^{-\beta t} R_0 + \alpha e^{-\beta t} - \sigma \beta e^{-\beta t} x = \alpha - \beta f(t,x)\,, \\ f_x(t,x) &= \sigma e^{-\beta t}\,, \\ f_{xx}(t,x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Nadalje, diferencijalni oblik jednadžbe za X_t jednak je $dX_t = e^{\beta t}\, dB_t$. Po Itôvoj formuli sada imamo

$$\begin{aligned} & df(t, X_t) \\ &= f_t(t, X_t)\, dt + f_x(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\, dX_t\, dX_t \\ &= (\alpha - \beta f(t, X_t))\; dt + \sigma\, dB_t\,. \end{aligned}$$

Gornji račun pokazuje da $f(t, X_t)$ zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu (2.39). Nadalje, $f(0, X_0) = R_0$. Zbog jedinstvenosti rješenja stohastičke diferencijalne jednažbe (2.39), slijedi da je $f(t, X_t) = R_t$ za sve $t \geq 0$.

Iz Teorema 2.24 slijedi da je $\int_0^t e^{\beta s}\,dB_s$ normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem nula i varijancom

$$\int_0^t e^{2\beta s}\,ds = \frac{1}{2\beta}\,(e^{2\beta t}-1)\,.$$

Slijedi da je i R_t normalno distribuirana slučajna varijabla, te vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}R_t &= e^{-\beta t}R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta t})\,,\\
\mathrm{Var}R_t &= \frac{\sigma^2}{2\beta}\,(1-e^{-2\beta t})\,.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da bez obzira kako odabrali parametre modela α, β i σ, s pozitivnom vjerojatnošću R_t može biti manji od nule. To je loše svojstvo predloženog modela. Dobro svojstvo modela je da se kamatne stope vraćaju prema srednjem (*mean-reverting property*). U slučaju $R_t = \frac{\alpha}{\beta}$, član uz dt u (2.39) (tzv. drift), jednak je nuli. U slučaju $R_t > \frac{\alpha}{\beta}$, član uz dt je negativan, te gura R_t natrag prema $\frac{\alpha}{\beta}$. U slučaju $R_t < \frac{\alpha}{\beta}$, član uz dt je pozitivan, te opet gura R_t natrag prema $\frac{\alpha}{\beta}$. Uočimo još da ako je $R_0 = \frac{\alpha}{\beta}$, tada je $\mathbb{E}R_t = \frac{\alpha}{\beta}$ za sve $t \geq 0$. Ako je $R_0 \neq \frac{\alpha}{\beta}$, tada je $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}R_t = \frac{\alpha}{\beta}$.

Primjer 2.26 *(Cox-Ingersoll-Ross-ov (CIR) model kamatnih stopa)* Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i α, β, σ pozitivni brojevi. Cox-Ingersoll-Rossov model procesa kamatnih stopa R_t zadan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)\,dt + \sigma\sqrt{R_t}\,dB_t\,. \tag{2.41}$$

Nedostatak CIR modela je da se rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.41) ne može zapisati u zatvorenoj formi.

Prednost CIR modela u odnosu na Vasicekov je taj da R_t nikad nije negativan. Heurističko objašnjenje te činjenice je da kada se R_t približava nuli, član uz dB_t postaje mali (volatilnost teži prema nuli), dok se član uz dt približava $\alpha > 0$. U takvoj situaciji dominantan je pozitivan drift koji R_t gura dalje od nule. Slično kao i Vasicekov model, CIR model ima svojstvo vraćanja prema srednjem.

U CIR modelu eksplicitno se mogu izračunati očekivanje i varijanca. Označimo $m(t) = \mathbb{E}R_t$ i $\gamma(t) = \mathbb{E}[R_t^2]$. Pretpostavimo da je $\int_0^t m(s)ds < \infty$.

Tada primjenom Fubinijevog teorema iz integralnog oblika jednadžbe (2.41) slijedi

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t \mathbb{E}[\alpha - \beta R_s]ds + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma\sqrt{R_t}dB_t\right] \\ &= \alpha t - \beta\int_0^t m(s)ds, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu koristili činjenicu da je Itôv integral I, $I_t = \int_0^t \sigma\sqrt{R_t}dB_t$, martingal pa je $\mathbb{E}I_t = 0$. Deriviranjem gornje jednadžbe dobivamo običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$m'(t) = \alpha - \beta m(t).$$

Množenjem gornje jednadžbe s $e^{\beta t}$ ona se svodi na

$$(e^{\beta t}m(t))' = \alpha e^{\beta t},$$

iz čega slijedi da je

$$e^{\beta t}m(t) - m(0) = \int_0^t \alpha e^{\beta s}ds = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1).$$

Iz $m(0) = R_0$ i gornje jednakosti sada slijedi da je

$$m(t) = R_0e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Uočimo da funkcija m zadovoljava gornju pretpostavku o integrabilnosti, pa je primjena Fubinijevog teorema bila opravdana. Korištenjem Itôve formule za $f(x) = x^2$ slijedi da je

$$d(R_t^2) = 2R_t(\alpha - \beta R_t)dt + 2\sigma R_t\sqrt{R_t}dB_t + \sigma^2R_tdt.$$

Uz pretpostavku da je $\int_0^t \gamma(s)ds < \infty$, primjenom Fubinijevog teorema na integralni oblik gornje jednadžbe i korištenja martingalnog svojstva Itôvog integrala slijedi

$$\gamma(t) = \gamma(0) + 2\int_0^t (\alpha m(s) - \beta\gamma(s))ds + 0 + \sigma^2\int_0^t m(s)ds,$$

odnosno

$$\gamma'(t) = 2\alpha m(t) - 2\beta\gamma(t) + \sigma^2 m(t).$$

Rješavanjem gornje linearne diferencijalne jednadžbe dobijemo

$$\gamma(t) = e^{-2\beta t}R_0^2 + (2\alpha+\sigma^2)\left[\frac{R_0}{\beta}(e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) + \frac{\alpha}{2\beta^2}(1 - e^{-2\beta t}) - \frac{\alpha}{\beta^2}(e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})\right]$$

iz čega slijedi da je

$$\mathrm{Var}R_t = \gamma(t) - m(t)^2 = \frac{\sigma^2}{\beta}R_0(e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) + \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2}(1 - 2e^{-\beta t} + e^{-2\beta t}).$$

2.5 Linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe

Definicija 2.27 Linearna stohastička diferencijalna jednadžba (SDJ) je stohastička jednadžba oblika

$$X_t = Y_t + \int_0^t X_s dZ_s$$

odnosno zapisano u diferencijalnom obliku

$$dX_t = dY_t + X_t dZ_t,\ X_0 = Y_0, \tag{2.42}$$

gdje su $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $Z = (Z_t : t \geq 0)$ Itôvi procesi.

Primjer 2.28 Pretpostavimo da je $Y_t = 1$ za sve t. Pokažimo da proces

$$X_t = \mathcal{E}(Z)_t = e^{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}$$

zadovoljava linearnu SDJ (2.42). Označimo $V_t = e^{Z_t}$. Tada je po Itôvoj formuli za $f(x) = e^x$

$$dV_t = V_t dZ_t + \tfrac{1}{2}V_t d\langle Z\rangle_t.$$

Nadalje, uočimo da je proces $e^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}$ slučajni proces koji je funkcija običnog Riemannovog integrala (za svaki $\omega \in \Omega$). Pokaže se da je[1]

$$de^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t} = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t} d\langle Z\rangle_t.$$

[1]Provjerite sami.

Primjenom Itôve formule za produkt[2] dobivamo

$$\begin{aligned} dX_t &= d\left(e^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}V_t\right)_t = e^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}dV_t + V_t d\left(e^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}\right)_t + dV_t d\left(e^{-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}\right)_t \\ &= e^{Z_t-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}dZ_t + \tfrac{1}{2}e^{Z_t-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}d\langle Z\rangle_t - \tfrac{1}{2}e^{Z_t-\frac{1}{2}\langle Z\rangle_t}d\langle Z\rangle_t + 0 \\ &= X_t dZ_t. \end{aligned}$$

Korištenjem ovog rješenja, može se pokazati da je rješenje jednadžbe (2.42) za općeniti Itôv proces Y

$$X_t = \mathcal{E}(Z)_t\left[Y_0 + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(Z)_s}dY_s - \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(Z)_s}d\langle Y, Z\rangle_s\right]. \tag{2.43}$$

Formulu (2.43) koristimo u sljedećem primjeru bez dokaza.

Primijenimo ovu formulu kako bismo odredili rješenje (2.40) stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.39) kojom je definiran Vasicekov model kamatnih stopa. Uočimo da SDJ (2.39) možemo zapisati u formi

$$dR_t = (\alpha dt + \sigma dB_t) - \beta R_t dt,$$

pa vidimo da je (2.39) linearna SDJ oblika (2.42) uz $Y_t = \alpha t + \sigma B_t$ i $Z_t = -\beta t$. Kako je $\mathcal{E}(Z)_t = e^{-\beta t}$ i $d\langle Y, Z\rangle_t = 0$, iz (2.43) odmah slijedi da je

$$\begin{aligned} R_t &= e^{-\beta t}\left[Y_0 + \int_0^t e^{\beta s}(\alpha ds + \sigma dB_s)\right] \\ &= e^{-\beta t}R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t}\int_0^s e^{\beta s}dB_s., \end{aligned}$$

što je upravo rješenje iz Primjera 2.25.

[2]Formulu navodimo u neformalnom zapisu bez dokaza: $d(X \cdot Y)_t = X_t \cdot dY_t + dX_t \cdot Y_t + d\langle X, Y\rangle_t$.