Predavanje 4 - 8.4.2020.

2.4 Itôva formula

U običnom diferencijalnom računu vrijedi sljedeće pravilo za derivaciju kompozicije funkcija f i g:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)\,,$$

što možemo pisati u obliku

$$df(g(t)) = f'(g(t))g'(t)\,dt = f'(g(t))dg(t)\,.$$

Glavno pitanje u ovom poglavlju na koje ćemo dati odgovor je kako izgleda odgovarajuće pravilo za kompoziciju $f(B_t)$ funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$. Probajmo naslutiti odgovor na ovo pitanje iz sljedećeg primjera.

Primjer 2.17 Neka je $f(x) = x^2$. Na prošlom predavanje smo, korištenjem Propozicije 2.15, pokazali da za $T > 0$ vrijedi:

$$B_T^2 = 2\int_0^T B_t dB_t + T,$$

odnosno[1]

$$f(B_T) - f(B_0) = \int_0^T f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(B_t)dt. \tag{2.24}$$

Gornju formulu možemo zapisati i u diferencijalnom obliku,

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)d\langle B\rangle_t.$$

[1] Uočite da koristimo da je $B_0 = 0$.

Iz gornjeg primjera jasno je da općenito ne vrijedi pravilo $df(B_t) = f'(B_t)\,dB_t$. Promatrajući formulu (2.24) naslućujemo da je to zbog ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja. Štoviše, pokazat ćemo da za točnu formulu uistinu trebamo pretpostaviti postojanje druge derivacije funkcije f.

Formula (2.24) naziva se Itôva formula za Brownovo gibanje (u integralnom obliku). Napomenimo da je integralni oblik formule (2.24) matematički smislen, jer je dobro definiran[2] Itôv integral $\int_0^T f'(B_t)\,dB_t$ koji se u njoj pojavljuje, a integral $\int_0^T f''(B_t)\,dt$ shvaćamo kao običan (Lebesgueov ili Riemannov) integral. S druge strane, pripadni diferencijalni oblik često je pogodniji za računanje.

Još jedna posljedica Primjera 2.17 je da funkcija Itôvog integrala ne mora nužno biti Itôv integral. Neka je $I = (I_t : t \geq 0)$ Itôv integral procesa $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T] \times \Omega)$ obzirom na Brownovo gibanje B i f neka funkcija. Tada slučajni proces $f(I) = (f(I_t) : t \geq 0)$ ne mora biti i sam Itôv integral nekog procesa obzirom na Brownovo gibanje. Naime, uzimanjem $H_t = 1$ i $f(x) = x^2$ kao u Primjeru 2.17, dobijemo da je $I_t = B_t$ i $df(I_t) = 2B_t dB_t + dt$. Obzirom da t ne možemo prikazati kao Itôv integral obzirom na Brownovo gibanje, slijedi da proces $f(I)$ nije Itôv integral obzirom na Brownovo gibanje. Stoga uvodimo širu klasu slučajnih procesa, za koju ćemo pokazati da uključuje i funkcije Itôvog integrala. To su Itôvi procesi za koje ćemo u daljnjem razviti stohastički diferencijalni račun.

Definicija 2.18 *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija.* Itôv proces *je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s\,dB_s + \int_0^t V_s\,ds\,, \tag{2.25}$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$ neslučajan, a $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ su adaptirani procesi t.d. $H \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ i $\int_0^t |V_s|\,ds < \infty$ g.s. za sve $t \geq 0$.

[2] Naš pristup ovdje je malo neprecizan. Naime, uočimo da općenito proces $(f'(B_t) : t \geq 0)$ nije nužno u $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T] \times \Omega)$ pa $\int_0^T f'(B_t)\,dB_t$ nije nužno Itôv integral u smislu definicije iz Poglavlja 2.2. No definicija Itôvog integrala se može proširiti na širu klasu integranada od $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T] \times \Omega)$ (tzv. *lokalno ograničeni* adaptirani procesi) koja obuhvaća neprekidne adaptirane slučajne procese. U tom kontekstu je Itôv integral $(f'(B_t) : t \geq 0)$ dobro definiran za funkcije $f \in C^1$. Mi ćemo u sklopu ovog kolegija zanemariti ovu nepreciznost.

Uočimo da je slučajni proces $(B_t^2 : t \geq 0)$ iz Primjera 2.17 Itôv proces. Uistinu, procesi $H = (2B_t : t \geq 0)$ i $V = 1$ zadovoljavaju uvjete iz Definicije 2.18 te je B_t^2 dan formulom (2.25).

Napomena 2.19 (a) Jednadžbu (2.25) možemo zapisati u diferencijalnom obliku

$$dX_t = H_t dB_t + V_t dt.$$

(b) Kvadratna varijacija Itôvog procesa (2.25) jednaka je

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds \, . \tag{2.26}$$

Uistinu, korištenjem do sada uspostavljenog diferencijalnog računa za Itôv integral (u skraćenom zapisu) dobijemo

$$\begin{aligned} d\langle X \rangle_t &= dX_t \cdot dX_t = (H_t dB_t + V_t dt)(H_t dB_t + V_t dt) \\ &= H_t^2 dB_t \cdot dB_t + 2H_t V_t dB_t \cdot dt + V_t^2 dt \cdot dt = {H_t}^2 dt. \end{aligned}$$

(c) Uočimo da kvadratna varijacija Itôvog procesa X u potpunosti dolazi od člana $I_t = \int_0^t H_s \, dB_s$. Običan integral $R_t = \int_0^t V_s \, ds$ ne doprinosi ništa kvadratnoj varijaciji od X, i on sam ima kvadratnu varijaciju nula: $\langle R \rangle_t = 0$. Međutim, to ne znači da je R deterministički, nego samo da je manje volatilan od I. Za male vrijednosti $h > 0$,

$$R_{t+h} \approx R_t + V_t h \, ,$$

što daje dobru procjenu za R_{t+h}. Primjetite da su u trenutku t vrijednosti R_t i V_t poznate. S druge strane,

$$I_{t+h} \approx I_t + H_t(B_{t+h} - B_t) \, ,$$

što ne možemo dobro predvidjeti zbog nepoznavanja prirasta $B_{t+h} - B_t$.

Sada želimo definirati stohastički integral u odnosu na Itôv proces X.

Definicija 2.20 *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (2.25), te neka je $K = (K_t : t \geq 0)$ adaptiran proces koji zadovoljava sljedeće tehničke uvjete:*

$$\mathbb{E} \int_0^t K_s^2 H_s^2 \, ds < \infty \ \ i \ \int_0^t |K_s V_s| \, ds < \infty$$

za sve $t \geq 0$. Stohastički integral od K s obzirom na Itôv proces X definiran je formulom

$$\int_0^t K_s \, dX_s = \int_0^t K_s H_s \, dB_s + \int_0^t K_s V_s \, ds \,. \tag{2.27}$$

Uočimo da tehnički uvjeti na proces K u prethodnoj definiciji osiguravaju da je stohastički integral od K s obzirom na X dobro definiran Itôv proces (Definicija 2.18), tj. da formula (2.27) ima smisla.

Sljedeći rezultat je Itôva formula za Itôve procese, koja je generalizacija Itôve formule (2.24) za Brownovo gibanje. Dodatno, zbog kasnijih primjena na Black-Scholes-Mertonov model, promatrat ćemo funkcije $f : [0, \infty\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te slučajne procese oblika $f(t, X_t)$ koji mogu ovisiti i o vremenskoj komponenti kao i o vrijednosti X_t.

Teorem 2.21 *(Itôva formula za Itôv proces) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (2.25) i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, X_t) \, dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) \, d\langle X \rangle_t \\ &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, X_t) H_t \, dB_t \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X_t) V_t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 \, dt \,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Prije nego prezentiramo skicu dokaza ovog rezultata, navedimo nekoliko napomena.

Napomena 2.22 (a) Itôva formula jednostavnije se pamti u diferencijalnom obliku:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) \, dt + f_x(t, X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) \, dX_t \cdot dX_t \,. \tag{2.29}$$

(b) Formula (2.28) za Brownovo gibanje glasi

$$f(T, B_T) = f(0, 0) + \int_0^T f_t(t, B_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, B_t) \, dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, B_t) \, dt,$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$df(t, B_t) = f_t(t, B_t)\, dt + f_x(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t)\, dt\,.$$

Uočimo da iz gornjeg izraza dobijemo Itôvu formulu (2.24) za Brownovo gibanje kada je $f \in C^2(\mathbb{R})$ funkcija jedne varijable.

Skica dokaza Teorema 2.21:
Formulu (2.28) pokazat ćemo za funkciju $f \in C^2([0,\infty\rangle \times \mathbb{R})$ t.d. su funkcije f, f_t, f_x, f_{xx} apsolutno omeđene s konstantom $M > 0$, te za Itôv proces X oblika

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t V_s ds, \tag{2.30}$$

gdje je $V = (V_t : t \geq 0)$ adaptiran proces t.d. je $|V_s| \leq M$ za sve $s > 0$ gotovo sigurno. Uočimo da Itôv proces X ima gotovo sigurno neprekidne trajektorije.

Prisjetimo se Taylorove formule funkcije dvaju varijabli. Neka su $t, s > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$, tada je

$$\begin{aligned} f(t,x) - f(s,y) &= f_t(s,y)(t-s) + f_x(s,y)(x-y) + \frac{1}{2} f_{tt}(s,y)(t-s)^2 \\ &\quad + f_{tx}(s,y)(t-s)(x-y) + \frac{1}{2} f_{xx}(s,y)(x-y)^2 + R(t,s,x,y)\,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

gdje je R funkcija ostatka takva da je

$$\lim_{t\to s} \lim_{x \to y} R(t,s,x,y) = 0.$$

Fiksirajmo $T \geq 0$ i neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ particija intervala $[0,T]$. Koristeći formulu (2.31) za $x = X_{t_{j+1}}$, $y = X_{t_j}$, $t = t_{j+1}$ i $s = t_j$ dobijemo

$$\begin{aligned} f(T, X_T) - f(0, X_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - f(t_j, X_{t_j})] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2 \\
&+\sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j)(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \\
&+\frac{1}{2} f_{tt}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j)^2 + R(X_{t_{j+1}}, X_{t_j}, t_{j+1}, t_j)\,. \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Kada pustimo $||\Pi|| \to 0$, lijeva strana ostaje ista. Da bismo pokazali da jednakost (2.28) vrijedi g.s. dovoljno je naći jedan niz particija $(\Pi_k)_k$ t.d. desna strana (2.32) konvergira k desnoj strani (2.28) g.s. Proučavamo što se događa s članovima na desnoj strani:

- Za prvi član imamo[3]

$$
\lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j) = \int_0^T f_t(t, X_t)\, dt\,,
$$

  gdje je na desnoj strani obični Lebesgueov (Riemannov) integral. Uočimo da gornji integral ima smisla za skoro svaki $\omega \in \Omega$ jer je funkcija $t \mapsto f_t(t, X_t(\omega))$ neprekidna.

- Drugi član, $\sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})$, konvergira prema Itôvom integralu $\int_0^T f_x(t, X_t)\, dX_t$. Zaista, označimo $H_t = f_x(t, X_t)$, te $H_t^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j}) 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$. Kako je po pretpostavci s početka dokaza $|f_x| \leq M$, slijedi da je $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T] \times \Omega)$ i $H^{(n)} \in \mathcal{E}_T$. Štoviše, zbog neprekidnosti funkcije f_x i gotovo sigurno neprekidnosti procesa X, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je proces H neprekidan reda 2. Sada po Propoziciji 2.15 slijedi da je $\lim_{n\to\infty}(H^{(n)} \circ B)_t = (H \circ B)_t$, odnosno

$$
\lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = \int_0^T f_x(t, X_t)\, dB_t.
$$

[3]Uočite da je za $\omega \in \Omega$ lijeva strana upravo Riemannova suma funkcije $t \mapsto f(t, X_t(\omega))$ na particiji Π.

Dodatno, uočimo da vrijedi[4]

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} V_s ds = \int_0^T f_x(t, X_t) V_t dt.$$

Tvrnja sada slijedi iz (2.30) zbrajanjem zadnjih dviju jednakosti.

- Treći član možemo rastaviti na tri dijela,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} V_s ds \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j}) \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} V_s ds\right)^2 \\
&= S_1 + S_2 + S_3. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Pokažimo prvo da S_1 konvergira prema običnom Lebesgueovom (Riemannovom) integralu $\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)\, dt$. To je posljedica činjenice da Brownovo gibanje ima ne-nul kvadratnu varijaciju. Ideja je da se $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$ zamijeni s $t_{j+1} - t_j$, te tada prijeđe na limes. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&(S_1 - \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)\, dt)^2 \\
&\le \left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j)\right)^2 \\
&+ \left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j) - \int_0^T f_{xx}(t, X_t)\, dt\right)^2.
\end{aligned}$$

Uočimo da drugi član u sumi konvergira u 0 g.s. po definiciji Riemannovog integrala. Dodatno, uz oznake $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ i $\Delta t_j =$

[4] Ovdje koristimo da je $\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} g(t_j)\int_{t_j}^{t_{j+1}} h(s)ds = \int_0^T g(t)h(t)dt$ za neprekidne funkcije g i h.

$t_{j+1} - t_j$, imamo

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta B_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[f_{xx}(t_i, X_{t_i}) f_{xx}(t_j, X_{t_j})(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)(\Delta B_j^2 - \Delta t_j)\right]$$

$$\leq M^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)(\Delta B_j^2 - \Delta t_j)\right] = M^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)^2\right],$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili da su za $i \neq j$ slučajne varijable $\Delta B_i^2 - \Delta t_i$ i $\Delta B_j^2 - \Delta t_j$ nezavisne i da je $\mathbb{E}[\Delta B_i^2] = \Delta t_i$. Kako je $\mathbb{E}\left[(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)^2\right] = 2\Delta t_i^2$, tvrdnja za S_1 sada slijedi iz[5]

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta B_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j\right)^2\right]$$

$$\leq 2M^2 \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i^2 \leq 2M^2 ||\Pi|| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = 2M^2 ||\Pi|| T \xrightarrow{||\Pi|| \to 0} 0.$$

Sljedeće, pokažimo da suma S_2 konvergira prema 0 (u srednjem reda 2). To slijedi iz omeđenosti funkcije f_{xx} i procesa V te ocjene

$$\mathbb{E}[S_2^2] \leq M^4 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^2 \mathbb{E}[\Delta B_j^2] = M^4 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^3 \leq M^4 T ||\Pi||^2 \xrightarrow{||\Pi|| \to 0} 0.$$

Analognim argumentom za sumu S_3 dobijemo

$$S_3 \leq M^3 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^2 \leq M^3 T ||\Pi|| \xrightarrow{||\Pi|| \to 0} 0.$$

Time smo pokazali da treći član konvergira k $\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)dt$.

[5] Uočimo da smo pokazali da $S_1 \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_y)dt$ pa postoji niz particija za koji imamo konvergenciju g.s.

- Za četvrti član, zbog g.s. neprekidnosti procesa X imamo

$$\lim_{||\Pi||\to 0} |\sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1}-t_j)(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})|$$
$$\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, X_{t_j})|(t_{j+1}-t_j)|X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|$$
$$\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, X_{t_j})|(t_{j+1}-t_j)$$
$$= 0 \cdot \int_0^T |f_{tx}(t, X_t)\, dt = 0\,.$$

- Za peti član slično dobijemo

$$\lim_{||\Pi||\to 0} |\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1}-t_j)^2|$$
$$\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, X_{t_j})| \cdot (t_{j+1}-t_j)^2$$
$$\leq \frac{1}{2} \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} (t_{k+1}-t_k) \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, X_{t_j})| \cdot (t_{j+1}-t_j)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_0^T |f_{tt}(t, X_t)|\, dt = 0\,.$$

Sličnim argumentom kao na početku dokaza može se pokazati da

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} R(X_{t_{j+1}}, X_{t_j}, t_{j+1}, t_j) = 0,$$

čime je dokaz teorema završen. □