Web predavanja - Financijsko modeliranje 2

Vanja Wagner (po skripti Z. Vondraček)

Predavanje 3 - 1.4.2020.

2.2 Itôv integral za opće integrande

U ovom odjeljku govorit ćemo o Itôvom integralu za opće integrande. Cilj je proširiti definiciju Itôvog integrala tako da definicija bude konzistentna i da se prenose svojstva Itôvog integrala za jednostavne integrande. Za prostor općih integranada uzimamo familiju $\mathbb{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : 0 \leq t \leq T)$ koji zadovoljavaju sljedeći tehnički uvjet:

$$\mathbb{E} \int_0^T H_t^2 \, dt < \infty \,. \tag{2.13}$$

Ovu familiju procesa ćemo označavati s $\mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$. $\mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$ je vektorski prostor sa skalarnim produktom

$$\langle H, K \rangle_{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right], \; H, K \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$$

i pripadnom normom $||H||^2_{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} = \langle H, H \rangle_{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}}$. Uočimo da je trivijalno $\mathcal{E}_T \subset \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$.

Glavna ideja za proširenje definicije Itôvog integrala je aproksimacija procesa $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$ nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \mathcal{E}_T$. Na primjer, pretpostavimo da $H = (H_t : 0 \leq t \leq T)$ ima neprekidne putove[1]. Odaberimo particiju $\Pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t\}$ intervala $[0,t]$ i definiramo jednostavan proces $H^{(n)}$ tako da stavimo $H_u^{(n)} = H_{t_j^{(n)}}$ za sve $u \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Za takav jednostavan integrand po

[1] $t \mapsto H_t(\omega)$ su neprekidne funkcije na $[0,T]$ za g.s. $\omega \in \Omega$

formuli (2.2) znamo izračunati $\int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Sada Itôv integral procesa H obzirom na Brownovo gibanje $B = (B_t : t \in [0,T])$ možemo definirati kao limes integrala takvih jednostavnih integranada kada se profinjuje particija. Ključan korak za provedbu takvog programa je sljedeća lema, koju navodimo bez dokaza.

Lema 2.9 *Za slučajni proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ postoji niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2\, dt = 0\,, \tag{2.14}$$

odnosno $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{ad}} H$, $n\to\infty$.

Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ niz aproksimirajućih jednostavnih integranada iz Leme 2.9, te označimo $I_t^{(n)} = \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Iz relacije (2.14) jednostavno slijedi da je niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T]\times\Omega)$, odnosno da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt = 0\,.$$

Međutim, zbog Itôve izometrije, Teorem 2.5,

$$\mathbb{E}\int_0^t |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt = \mathbb{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2]\,,$$

pa je i

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = 0\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{2.15}$$

To znači da je $(I^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, te zato ima limes. Taj limes zovemo Itôvim integralom procesa H obzirom na Brownovo gibanje B i označavamo $(H\cdot B)_t = I_t = \int_0^t H_u\, dB_u$. Dakle,

$$\int_0^t H_u\, dB_u = (L^2)\lim_{n\to\infty}\int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u\,. \tag{2.16}$$

Napomena 2.10 (i) Definicija Itôvog integrala za opće integrande je konzistentna, odnosno poopćuje Definiciju 2.2 i ne ovisi o odabiru aproksimirajućeg niza.[2]

[2] Tvrdnju provjerite sami.

(ii) Uočite da je $\int_0^t H_u \, dB_u$ samo oznaka za slučajnu varijablu $I_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tj. taj stohastički integral nije definiran po trajektorijama Brownovog gibanja.

(iii) Iz definicije direktno slijedi da je proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ $\mathbb{F}$-adaptiran.

Tako definiran integral nasljeđuje svojstva Itôvog integrala jednostavnih integranada. Sljedeći teorem navodi ta svojstva.

Teorem 2.11 *Neka je $T > 0$, te neka je $H = (H_t : t \in [0,T]) \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. Tada slučajan proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom (2.16) ima sljedeća svojstva:*

(a) (neprekidnost) *Funkcija $t \mapsto I_t$ je neprekidna na $[0,T]$ g.s.,*

(b) (linearnost) *Za $H, K \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ i $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$((aH + bK) \cdot B)_t = a(H \cdot B)_t + b(K \cdot B)_t,$$

*(c) (*Itôva izometrija*)* $\mathbb{E} I_t^2 = \mathbb{E} \int_0^t H_u^2 \, du$*,*

(d) (martingalnost) *Proces I je martingal obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$.*

Prije nego krenemo s dokazom gornjeg teorema, dokazat ćemo pomoćnu propoziciju za (vremenski neprekidne) martingale.

Propozicija 2.12 *(Doobova L^p-nejednakost) Neka je $X = (X_t : t \in [0,T])$ zdesna neprekidni pozitivni submartingal i $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0,t]} X_s^p\right] \leq q^p \mathbb{E}[X_t^p], \; t \geq 0.$$

Specijalno, za zdesna neprekidni martingal X vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0,t]} X_s^2\right] \leq 4\mathbb{E}[X_t^2], \; t \geq 0.$$

Dokaz: Koristimo Doobovu nejednakost za vremenski diskretne martingale.[3] Neka je $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući niz t.d. $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,t]$. Tada zbog

[3] Vidi Teorem 1.87 u skripti Z.Vondraček: *Slučajni procesi*

neprekidnosti zdesna submartingala X slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^p\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} X_s^p\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right]$$

$$\stackrel{\text{(LTMK)}}{=} \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right]. \tag{2.17}$$

Kako je proces $(X_{r_k} : k = 1, ..., n)$ diskretni submartingal, iz diskretne Doobove L^p-nejednakosti slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right] \leq q^p \mathbb{E}\left[X_{r_n}^p\right]. \tag{2.18}$$

Tvrdnja sada slijedi iz (2.17), (2.18) i činjenice da je X^p submartingal (Jensenova nejednakost) pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq t$ i $\mathbb{E}[X_{r_n}^p] \leq \mathbb{E}[X_t^p]$.

Ako je X neprekidni martingal, onda je po Jensenovoj nejednakosti X^2 neprekidni submartingal, pa druga nejednakost slijedi iz prve uz $p = q = 2$. $\square$

Dokaz Teorema 2.11:

(a) Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ aproksimirajući niz za H iz Leme 2.9. Kako je $I^{(n)} = (H^{(n)} \cdot B)$ neprekidni martingal, Teorem 2.4, po Doobovoj L^p-nejednakosti i (2.15) slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n)} - I_t^{(m)}|^2\right] \leq 4\mathbb{E}[(I_T^{(n)} - I_T^{(m)})^2] \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Stoga, možemo odabrati podniz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ i događaj

$$A_k = \left\{\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| \geq 2^{-k}\right\}$$

vrijedi $\mathbb{P}(A_k) < 2^{-k}$. Kako je $\sum_k \mathbb{P}(A_k) < \infty$ po Borel-Cantellijevoj lemi slijedi da je $\mathbb{P}(\overline{\lim}_k A_k) = 0$. Prema tome niz $(I^{(n_k)}(\omega))_k$ je uniformno Cauchyjev u $C([0,T])$ za gotovo svaki $\omega \in \Omega$. Zbog potpunosti prostora $(C([0,T]), ||\cdot||_\infty)$ slijedi da je $(I^{(n_k)})_k$ g.s. konvergentan i limes je g.s. neprekidna funkcija. Kako niz $(I^{(n)})_n$ konvergira k I u L^2, tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti g.s. limesa.

(b) Slijedi direktno iz linearnosti Itôvog integrala za jednostavne integrande, Napomena 2.3(b).

(c) Iz $I_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} I_t$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(I_t^{(n)})^2] = \mathbb{E}[I_t^2]$. Iz Itôve izometrije za jednostavne integrande, Teorem 2.5, sada slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_u^{(n)})^2 du\right] = \mathbb{E}[I_t^2].$$

S druge strane $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} H$ pa je specijalno

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_u^{(n)})^2 du\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^2 du\right].$$

Tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti limesa.

(d) Proces I je adaptiran i po (c) dijelu vrijedi $\mathbb{E}[|I_t|] \le \mathbb{E}[I_t^2]^{\frac{1}{2}} < \infty$. Ostaje pokazati da je $\mathbb{E}[I_t - I_s|\mathcal{F}_s] = 0$ za sve $0 \le s < t$. Iz Jensenove nejednakosti i definicije Itôvog integrala slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[I_t - I_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\right]\right)^2\right] &\le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(I_t - I_t^{(n)}\right)^2|\mathcal{F}_s\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(I_t - I_t^{(n)}\right)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

pa postoji podniz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.d. je

$$\mathbb{E}\left[I_t - I_t^{(n_k)}|\mathcal{F}_s\right] \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Kako $I_s^{(n_k)} \xrightarrow{L^2} I_s$, postoji podniz (kojeg isto označavamo s $(n_k)_k$) t.d. $I_s^{(n_k)} \xrightarrow{g.s.} I_s$. Tvrdnja sada slijedi iz martingalnosti procesa $I^{(n)}$, te

$$\mathbb{E}\left[I_s - I_t|\mathcal{F}_s\right] = I_s - I_s^{(n_k)} + \mathbb{E}\left[I_s^{(n_k)} - I_t^{(n_k)}|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[I_t^{(n_k)} - I_t|\mathcal{F}_s\right].$$

□

Napomena 2.13 Korištenjem Leme 2.9 može se također pokazati da je

$$\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\,du,\ t\in[0,T].$$

Učite da za $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T]\times\Omega)$ nužno vrijedi da je $\int_0^t H_u^2\,du < \infty$ g.s.

2.3 Računanje Itôvog integrala

Sada ćemo korištenjem definicije Itôvog integrala izvesti formulu za računanje integrala $\int_0^T H_t\, dB_t$, gdje je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje i $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}([0,T]\times\Omega)$ slučajan proces neprekidan u srednjem reda 2.

Za početak neka je $0 \le a < b \le T$ i ξ $\mathcal{F}_a$-izmjeriva omeđena slučajna varijabla. Tada je slučajni proces $(\xi 1_{[a,b]}(t) : t \in [0,T])$ u klasi $\mathcal{E}_T$ pa po definiciji vrijedi da je

$$\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t = \xi(B_b - B_a).$$

Ova se jednakost sada može proširiti i na slučajne varijable $\xi \in L^2(\Omega)$.

Lema 2.14 *Neka je $0 \le a < b \le T$ i ξ $\mathcal{F}_a$-izmjeriva slučajna varijabla t.d. je $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$. Tada je slučajni proces $\xi 1_{[a,b]} \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ i vrijedi*

$$\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t = \xi(B_b - B_a). \tag{2.19}$$

Dokaz: Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo $\xi_k = (-k) \vee \xi \wedge k$ odrezanu slučajnu varijablu. Tada je slučajni proces $\xi_k 1_{[a,b]} \in \mathcal{E}_T$ aproksimirajući niz za $\xi 1_{[a,b]}$[4], odnosno

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (\xi 1_{[a,b]}(t) - \xi_k 1_{[a,b]}(t))^2 dt\right] = 0.$$

Sada iz definicije Itôvog integrala i (2.19) slijedi da je

$$\begin{aligned}\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t &= (L^2) \lim_{k\to\infty} \int_0^T \xi_k 1_{[a,b]}(t) dB_t = (L^2) \lim_{k\to\infty} \xi_k (B_b - B_a) \\ &= \xi(B_b - B_a).\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.15 *Neka je $H \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ slučajan proces koji je neprekidan u srednjem reda 2, odnosno za koji vrijedi*

$$\lim_{s\to t} \mathbb{E}[(H_s - H_t)^2] = 0, \ \forall t \ge 0.$$

[4] Raspišite detalje sami.

Tada je

$$\int_0^T H_s dB_s = (L^2) \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}),$$

za sve nizove particija $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ *t.d.* $||\Pi|| \to 0$.

Dokaz: Za danu subdiviziju Π definiramo diskretizaciju H^Π procesa H s

$$H_t^\Pi = \sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}}^\Pi 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t).$$

Po Lemi (2.14) znamo da je $H^\Pi \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$. Štoviše, $H^\Pi \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} H$. Naime, po Itôvoj izometriji, Teorem 2.11(c), slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (H_s - H_s^\Pi) dB_s\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s - H_s^\Pi)^2 ds\right] \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E}\left[(H_s - H_{t_{j-1}})^2 ds\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \sup_{u,v \in [t_{j-1}, t_j]} \mathbb{E}\left[(H_u - H_v)^2\right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Kako je $t \mapsto H_t$ neprekidno preslikavanje u srednjem reda 2, to je uniformno neprekidno u srednjem reda dva na intervalu $[0,T]$. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. za sve $u, v \in [0,T]$, $|u - v| < \delta$, vrijedi $\mathbb{E}[(H_u - H_v)^2] < \varepsilon$. Prema tome, iz (2.20) slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (H_s - H_s^\Pi) dB_s\right|^2\right] \leq \varepsilon \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \varepsilon T,$$

za sve particije Π za koje je $||\Pi|| < \delta$. Tvrdnja sada slijedi iz Leme 2.14, jer je

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s dB_s\right] = (L^2) \lim_{||\Pi|| \to 0} \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^\Pi dB_s\right] = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

□

Napomena 2.16 Lako se pokaže da je proces $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$ neprekidan u srednjem reda 2 ako je preslikavanje

$$(s,t) \mapsto \mathbb{E}[H_s H_t]$$

neprekidno.[5]

Sada ćemo iskoristiti Propoziciju 2.15 da izračunamo integral

$$\int_0^T B_t dB_t.$$

Uočimo da gornji integral ima smisla obzirom da je $B \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,T] \times \Omega)$. Štoviše, B je neprekidno preslikavanje u srednjem reda 2.[6] Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, definirajmo ekvidistantnu particiju Π^n s korakom $\frac{T}{n}$, za koju je $t_i^{(n)} = \frac{iT}{n}$, $i = 0, ..., n$. Uz oznaku $B_j^{(n)} = B_{t_j^{(n)}}$, iz Propozicije 2.15 slijedi da je

$$\int_0^T B_t\, dB_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{(n)}(B_{j+1}^{(n)} - B_j^{(n)})\,. \tag{2.21}$$

Sljedeći račun će nam trebati za određivanje gornjeg limesa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(B_{j+1} - B_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} B_{j+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} B_j B_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} B_j^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} B_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} B_j B_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} B_j^2 \\
&= \frac{1}{2}B_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} B_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} B_j B_{j+1} \\
&= \frac{1}{2}B_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} B_j(B_j - B_{j+1})\,. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Uvrstimo u (2.21) i dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^T B_t\, dB_t &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[B_{\frac{(j+1)T}{n}} - B_{\frac{jT}{n}}\right]^2\right) \\
&= \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}\langle B\rangle_T = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T\,. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

[5]Tvrdnju provjerite sami.
[6]Tvrdnju provjerite sami.

Uočimo razliku u odnosu na obični diferencijalni račun. Ako je g diferencijabilna funkcija s $g(0) = 0$, tada imamo

$$\int_0^T g(t)\,dg(t) = \int_0^T g(t)g'(t)\,dt = \frac{1}{2}g^2(T)\,.$$

Kod Itôvog integrala pojavljuje se dodatni član $\frac{1}{2}T$ kao posljedica ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja.

Kao posljedicu formule (2.23) dobivamo da je proces $B_t^2 - t$ martingal. Zaista, taj slučajni proces je dva puta Itôv integral $\int_0^t B_u\,dB_u$. Međutim, Itôv integral je martingal po Teoremu 2.11 (d).