Predavanje 2 - 25.3.2020.

2. ITÔV INTEGRAL

Neka je $H = (H_t : t \in [0,T])$ odgovarajući adaptirani slučajni proces i $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje. Cilj ovog poglavlja je definirati Itôv integral

$$\int_0^T H_t dB_t$$

i pokazati njegova svojstva. Uočimo da gornji integral ne možemo definirati po trajektorijama Brownovog gibanja (kao Lebesgue-Stieltjesov integral) jer je Brownovo gibanje neomeđene varijacije. Dodatno, diferencijalni račun koji se koristi za računanje s takvim integralima razlikuje se od uobičajenog diferencijalnog računa. Ovdje se diferencijalni račun temelji se Itôvoj formuli, koja u obzir uzima ne-nul kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja.

U financijama se Itôv integral koristi za modeliranje vrijednosti portfelja. Nakon što razvijemo Itôv račun, primjenit ćemo ga na izvod Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe za cijenu opcije. Također, u primjenama u financijama H_t će imati interpretaciju pozicije u financijskoj imovini u trenutku t, koja u principu ovisi o informaciji dostupnoj do trenutka t. Odavde slijedi zahtjev na adaptiranost slučajnog procesa H. S druge strane, budući prirasti Brownovog gibanja nezavisni su od $\mathcal{F}_t$. To znači da je naša pozicija u trenutku t nezavisna od buduće nesigurnosti na tržištu generirane Brownovim gibanjem B.

2.1 Itôv integral za jednostavne integrande

Fiksirajmo pozitivno vrijeme $T > 0$. Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje zajedno s Brownovskom filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Neka je $H = (H_t : t \in [0, T])$ adaptiran slučajni proces obzirom na $\mathbb{F}$. Prvi korak u definiciji Itôvog integrala sastoji se u tome da se integriraju jednostavni procesi.

Definicija 2.1 *Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ zove se* jednostavan proces *ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \, 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{2.1}$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$, i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva. S $\mathcal{E}_T$ označimo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na $[0, T]$.

Riječima, adaptiran slučajni proces H je jednostavan, ako postoji particija Π takva da je H konstantan na svakom intervalu particije $[t_j, t_{j+1})$. Kada kažemo konstantan mislimo da je jednak jednoj slučajnoj varijabli koja se ne mijenja kroz taj interval. Omeđenost slučajnih varijabli ϕ_j znači da postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je $|\phi_j| \le M$ za sve j (i g.s. sve $\omega \in \Omega$).

Definicija 2.2 *Za slučajni proces $H \in \mathcal{E}_T$ definiran s (2.1) definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0, T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).[1] \tag{2.2}$$

Proces I zovemo Itôv integral *jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s*

$$I_t = \int_0^t H_s \, dB_s = (H \cdot B)_t \, .$$

[1] $a \wedge b = \min\{a, b\}$

Napomena 2.3 *(a) Uočimo da je za* $t \in [t_{k-1}, t_k\rangle$,

$$\int_0^t H_s \, dB_s = \sum_{j=0}^{k-2} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_{k-1}(B_t - B_{t_{k-1}})$$

(b) Iz definicije procesa I lako se vidi da je on $\mathbb{F}$-adaptiran. Također, uočimo da je preslikavanje $H \mapsto (H \cdot B)$ na $\mathcal{E}_T$ linearno.

(c) Razmišljajmo o vrijednosti Brownovog gibanja B_t kao o jediničnoj cijeni financijske imovine (npr. jedne dionice) u trenutku t. Budući da B_t može biti manje od nule, takav model je loš, ali to ćemo u ovom trenutku zanemariti. O vremenima $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ mislimo kao o trenucima trgovanja u toj imovini, a o $\phi_{t_0}, \phi_{t_1}, \ldots, \phi_{t_{n-1}}$ kao o pozicijama u imovini (broj dionica) unutar intervala oblika $[t_j, t_{j+1})$. Uočimo da je tada dobitak od takvog trgovanja u svakom trenutku t dan s I_t. Na proces I stoga možemo gledati na analogon procesa dobitka $G_t(\phi)$ u diskretnom modelu financijskog tržišta.

Prvo važno svojstvo slučajnog procesa I je da od Brownovog gibanja B nasljeđuje svojstvo martingalnosti.

Teorem 2.4 *Itôv integral $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom* (2.2) *je martingal.*

Dokaz: U Napomeni 2.3 već smo spomenuli kako je proces I $\mathbb{F}$-adaptiran. Također, iz omeđenosti slučajnih varijabli ϕ_j ($|\phi_j| \leq M$ za sve j) slijedi da je za svaki $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}[|I_t|] \leq M \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[|B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}|] = M\sqrt{\frac{2}{\pi}t} < \infty.$$

Neka su sada $0 \leq s < t \leq T$. Pretpostavimo da se s i t nalaze u različitim intervalima particije Π. Slučaj kada su ta vremena u istom intervalu particije dokazuje se slično.[2] Dakle, neka je $s \in [t_l, t_{l+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ za $l < k$. Jednakost (2.2) možemo napisati kao

$$I_t = \sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_l (B_{t_{l+1}} - B_{t_l})$$

[2]Dokažite sami za vježbu.

$$+ \sum_{j=l+1}^{k-1} \phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_k(B_t - B_{t_k})\,. \tag{2.3}$$

Računamo uvjetno očekivanje svakog od četiri člana u formuli (2.3), uvjetno na σ-algebru $\mathcal{F}_s$. Budući da su sve slučajne varijable u prvom članu $\mathcal{F}_s$-izmjerive, vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{l-1} \phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s\right] = \sum_{j=0}^{l-1} \phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\,. \tag{2.4}$$

Za drugi član imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_l(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \,|\, \mathcal{F}_s] &= \phi_l(\mathbb{E}[B_{t_{l+1}} - B_{t_l} \,|\, \mathcal{F}_s]) \\ &= \phi_l(B_s - B_{t_l})\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Zbrajanjem (2.4) i (2.5) dobivamo I_s. Dakle, preostaje pokazati da su uvjetna očekivanja trećeg i četvrtog člana jednaka nuli. Da bismo to pokazali računamo za $j = l+1, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\quad= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_{t_j}] \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\quad= \mathbb{E}[\phi_j(\mathbb{E}[B_{t_{j+1}} \,|\, \mathcal{F}_{t_j}] - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\quad= \mathbb{E}[\phi_j(B_{t_j} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] = 0\,, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem retku koristili svojstvo martingalnosti Brownovog gibanja. Zbog linearnosti uvjetnog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=l+1}^{k-1} \phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s\right] = 0\,.$$

Na isti način se pokaže i da je uvjetno očekivanje četvrtog člana jednako nuli. $\square$

Budući da je $I_0 = 0$, slijedi da je $\mathbb{E}I_t = \mathbb{E}I_0 = 0$ za sve $0 \le t \le T$. Specijalno, $\mathrm{Var} I_t = \mathbb{E}I_t^2$. Očekivanje kvadrata Itôvog integrala izračunato je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.5 *(Itôva izometrija) Itôv integral definiran s (2.2) zadovoljava*

$$\mathbb{E}I_t^2 = \mathbb{E}\int_0^t H_u^2\,du\,. \tag{2.6}$$

Dokaz: Uvedimo zbog jednostavnosti sljedeće oznake: $\Delta B_j = B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}$ i $\Delta t_j = t_{j+1} \wedge t - t_j \wedge t$. Neka je $t \in [t_k, t_{k+1}\rangle$. Tada je $I_t = \sum_{j=0}^k \phi_j \Delta B_j$, te vrijedi

$$I_t^2 = \sum_{j=0}^k \phi_j^2 \Delta B_j^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le k} \phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j \,.$$

Prvo pokazujemo da je očekivanje članova u drugoj sumi jednako nula. Za $i < j$ je $\phi_i \phi_j \Delta B_i$ $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerivo, dok je prirast ΔB_j nezavisan od $\mathcal{F}_{t_j}$ i $\mathbb{E}\Delta B_j = 0$. Zato je

$$\mathbb{E}[\phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j] = \mathbb{E}[\phi_i \phi_j \Delta B_i] \mathbb{E}\Delta B_j = 0 \,.$$

Pogledajmo sada član oblika $\phi_j^2 \Delta B_j^2$. Slučajna varijabla ϕ_j^2 je $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva, dok je kvadrat prirasta ΔB_j^2 nezavisan od $\mathcal{F}_{t_j}$, te $\mathbb{E}\Delta B_j^2 = \mathbb{E}(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t})^2 = \Delta t_j$ za $j = 0, 1, \dots, k$. Zato je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I_t^2 &= \sum_{j=0}^k \mathbb{E}[\phi_j^2 \Delta B_j^2] = \sum_{j=0}^k \mathbb{E}[\phi_j^2]\mathbb{E}[\Delta B_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^k \mathbb{E}\phi_j^2 \Delta t_j \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Uočite da je H_u konstantna na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ i jednaka ϕ_j. Preciznije, $H_u(\omega) = \phi_j(\omega)$ za sve $u \in [t_j, t_{j+1}\rangle$, za g.s. sve $\omega \in \Omega$. Zato je

$$\phi_j^2 \Delta t_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2 \, du \,, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Uvrstimo li u (2.7) dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I_t^2 &= \sum_{j=0}^k \mathbb{E} \int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2 \, du = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2 \, du \right] \\ &= \mathbb{E} \int_0^t H_u^2 \, du \,. \end{aligned}$$

□

Napomena 2.6 *Prethodnim teoremom pokazali smo da postoji izometrija između normiranih prostora $\mathcal{E}_T$ s produktom $\langle H, K \rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right]$ i $L^2(\Omega)$ s produktom $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$.*

Proučimo na kraju kvadratnu varijaciju Itôvog integrala I_t.

Teorem 2.7 *Kvadratna varijacija do trenutka t Itôvog integrala I_t definiranog formulom* (2.2) *jednaka je*

$$\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\, du\,. \tag{2.8}$$

Dokaz: Izračunajmo prvo kvadratnu varijaciju Itôvog integrala na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ na kojem je H_u konstantan. Odaberimo particiju

$$t_j = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t_{j+1}$$

i promotrimo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1}[I_{s_{i+1}} - I_{s_i}]^2 &= \sum_{i=0}^{m-1}[\phi_j(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})]^2 \\ &= \phi_j^2\sum_{i=0}^{m-1}(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})^2\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kada $m \to \infty$ i korak $\max_{i=0,1,\ldots,m-1}(s_{i+1}-s_i) \to 0$, član $\sum_{i=0}^{m-1}(B_{s_{i+1}}-B_{s_i})^2$ teži prema kvadratnoj varijaciji Brownovog gibanja na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$, t.j., prema $t_{j+1} - t_j$. Prema tome, limes od (2.9) jednak je

$$\phi_j^2(t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_u^2\, du\,.$$

Zbrajanjem svih odgovarajućih dijelova dobivamo formulu (2.8). □

Uočimo da se varijanca i kvadratna varijacija Itôvog integrala razlikuju. Po Teoremu 2.5, $\mathrm{Var} I_t = \mathbb{E}\int_0^t H_u^2\, du$ (što je nenegativan realan broj), dok je po Teoremu 2.7, $\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\, du$ (što je slučajna varijabla). Ponovimo da se kvadratna varijacija računa po putu (trajektoriji), dok je varijanca usrednjenje po svim putovima.

Napomena 2.8 (o notaciji).

(a) Prisjetimo se neformalne oznake za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja $dB_t dB_t = dt$. Tu jednakost smo interpretirali kao tvrdnju da Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju brzinom jedan po jedinici vremena. Na sličan način, stohastički integral $I_t = \int_0^t H_u \, dB_u$ neformalno zapisujemo u obliku $dI_t = H_t \, dB_t$. To vodi do sljedeće oznake za $\langle I \rangle_t$:

$$dI_t dI_t = H_t^2 \, dB_t dB_t = H_t^2 \, dt \,. \tag{2.10}$$

(b) Oznake

$$I_t = \int_0^t H_u \, dB_u \tag{2.11}$$

i

$$dI_t = H_t \, dB_t \tag{2.12}$$

imaju skoro isto značenje. Jednakost (2.11) ima precizno značenje dano definicijom (2.2). Jednakost (2.12) ima neprecizno značenje da kada se pomaknemo unaprijed u vremenu za “vrlo malo”, promjena Itôvog integrala I je H_t puta promjena Brownovog gibanja u tom malom vremenskom pomaku. Ta jednakost ima i precizno značenje koje se dobije integriranjem obiju strana. U tom slučaju moramo paziti na konstantu integriranja I_0:

$$I_t = I_0 + \int_0^t H_u \, dB_u \,.$$

Kažemo da je (2.12) diferencijalni oblik od (2.11), dok je (2.11) integralni oblik od (2.12).