Web predavanja - Financijsko modeliranje 2

Vanja Wagner (po skripti Z. Vondraček)

Predavanje 11 - 27.5.2020.

4.3.1 Maksimum i minimum Brownovog gibanja (nastavak)

Razdioba maksimuma Brownovog gibanja do trenutka t, M_t^B, dobivena Teoremom 4.20, bit će nam potrebna za određivanje cijena binarne opcije s barijerom iz Primjera 4.19. Da bi odredili cijene call opcije s barijerom iz istog primjera, potrebna nam je zajednička razdioba slučajnog vektora (B_t, M_t^B). Uočite da ove rezultate nećemo koristiti direktno u Primjeru 4.19, već kao pomoćne rezultate za određivanje razdioba od M_t i (S_t, M_t), gdje je M_t maksimum do trenutka t geometrijskog Brownovog gibanja S. Korištenjem principa refleksije, odredimo razdiobu slučajnog vektora (B_t, M_t^B).

Teorem 4.21 *Funkcija gustoće slučajnog vektora* (B_t, M_t^B) *dana je s*

$$f_{(B_t, M_t^B)}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}(2y-x)e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}, \ x \leq y, \ y \geq 0.$$

Dokaz: Dokaz provodimo slično kao u Teoremu 4.20, pri čemu umjesto vjerojatnosti $\mathbb{P}(M_t^B > x, B_t \leq x)$ promatramo $\mathbb{P}(M_t^B > y, B_t \leq x)$, obzirom da je

$$f_{(B_t, M_t^B)}(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}\mathbb{P}(M_t^B > y, B_t \leq x).[1]$$

Stoga umjesto reflektiranog Brownovog gibanja u slučajnom vremenu T_x promatramo reflektirano Brownovo gibanje u vremenu T_y (u oznaci W). Kako

[1] Uočimo da je $\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}\mathbb{P}(M_t^B > y, B_t \leq x) = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}[\mathbb{P}(B_t \leq x) - \mathbb{P}(M_t^B \leq y, B_t \leq x)] = -\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}F_{(B_t, M_t^B)}(x,y)$.

je $M_t^B \geq B_0 = 0$ i $M_t^B \geq B_t$, gornju vjerojatnost računamo samo za $y \geq 0$ i $x \leq y$. Kao i prije, proces W dan je formulom (4.42), gdje umjesto fiksnog vremena t_0 imamo slučajno vrijeme T_y. Kako su W i B oboje Brownova gibanja, uočimo da su slučajni vektori (T_y, B_t) i (T_y^W, W_t) jednako distribuirani. Kao i u dokazu Teorema 4.20, koristimo da je $T_y = T_y^W$ i $B_{T_y} = y$ g.s. i dobivamo da je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_t^B > y, B_t \leq x) &\overset{(4.41)}{=} \mathbb{P}(T_y \leq t, B_t \leq x) = \mathbb{P}(T_y^W \leq t, W_t \leq x) \\ &= \mathbb{P}(T_y \leq t, W_t \leq x) \overset{(4.42)}{=} \mathbb{P}(T_y \leq t, 2B_{T_y} - B_t \leq x) \\ &= \mathbb{P}(T_y \leq t, B_t \geq 2y - x) = \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x), \qquad (4.47)\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili (4.40) i nejednakost $2y - x \geq y$, iz kojih slijedi da je $\{B_t \geq 2y - x\} \subset \{B_t \geq y\} \subset \{T_y \leq t\}$. Korištenjem distribucije $B_t \sim N(0, t)$ slijedi da je

$$\mathbb{P}(M_t^B > y, B_t \leq x) = \int_{2y-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du.$$

Tvrdnja sada slijedi parcijalnim deriviranjem po x i y gornjeg izraza. □

Napomena 4.22 Označimo s $m_t^B = \min_{s\in[0,t]} B_s$ minimum Brownovog gibanja do trenutka t. Razdiobu od m_t^B i (B_t, m_t^B) možemo dobiti direktno iz prethodnih rezultata. Naime, zbog činjenice da je i $(-B_t : t \geq 0)$ također Brownovo gibanje, iz Teorema 4.20 slijedi da je za $x < 0$[2]

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(m_t^B \geq x) &= \mathbb{P}\left(\min_{s\in[0,t]} B_s \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\min_{s\in[0,t]} (-B_s) \geq x\right) = \mathbb{P}\left(-\max_{s\in[0,t]} B_s \geq x\right) \\ &= \mathbb{P}(M_t^B \leq -x) = \mathbb{P}(|B_t| \leq -x) = \mathbb{P}(-|B_t| \geq x),\end{aligned}$$

pa je $m_t^B \overset{d}{=} -|B_t|$. Analogno se pokaže da je

$$\mathbb{P}(B_t \geq x, m_t^B \leq y) = \mathbb{P}(B_t < -x, M_t \geq -y),\ y \leq 0,\ y \leq x,$$

pa je

$$f_{(B_t, m_t^B)}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}(x - 2y)e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}},\ y \leq x,\ y \leq 0.$$

[2] $m_t^B \leq B_0 = 0$

4.3.2 Maksimum i minimum Brownovog gibanja s driftom

Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $T > 0$ i $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Brownovo gibanje s driftom B^* definiramo kao

$$B_t^* := B_t + \mu t, \; t \geq 0.$$

Označimo $M_t^* = \max_{s \in [0,t]} B_s^*$ i $m_t^* = \min_{s \in [0,t]} B_s^*$. Odredimo sada razdiobe vezane uz M^* i m^*, korištenjem rezultata iz 4.3.1. i Girsanovljevog teorema. Označimo s $\mathbb{P}^*$ vjerojatnosnu mjeru iz Girsanovljevog teorema. Tada vrijedi da je B^* Brownovo gibanje s obzirom na $\mathbb{P}^*$ i da je

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}^* \left[e^{\mu B_T + \frac{1}{2}\mu^2 T} 1_A \right], \; A \in \mathcal{F}_T.$$

Korištenjem Teorema 4.21, ali sada za B^* i $\mathbb{P}^*$, slijedi da je za $x \leq y$, $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_T^* \leq x, M_T^* \leq y) &= \mathbb{E}^* \left[e^{\mu B_T + \frac{1}{2}\mu^2 T} 1_{\{B_T^* \leq x, M_T^* \leq y\}} \right] \\
&= \mathbb{E}^* \left[e^{\mu B_T^* - \frac{1}{2}\mu^2 T} 1_{\{B_T^* \leq x, M_T^* \leq y\}} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{x} \int_{x \vee 0}^{y} e^{\mu u - \frac{1}{2}\mu^2 T} \frac{2}{\sqrt{2\pi T^3}} (2u - v) e^{-\frac{(2u-v)^2}{2T}} \, dv \, du.
\end{aligned}$$

Parcijalnim deriviranjem ovog izraza dobivamo funkciju gustoće slučajnog vektora (B_T^*, M_T^*) *s obzirom na vjerojatnost* $\mathbb{P}$,

$$\begin{aligned}
f_{(B_t^*, M_t^*)}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \mathbb{P}(M_t^* \leq y, B_t^* \leq x) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi T^3}} (2y - x) e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T - \frac{(2y-x)^2}{2T}}, \; x \leq y, \, y \geq 0.
\end{aligned}$$

Razdioba od M_T^* (s obzirom na $\mathbb{P}$) je sada jednaka

$$\begin{aligned}
f_{M_T^*}(y) &= \int_{-\infty}^{y} \frac{2}{\sqrt{2\pi T^3}} (2y - x) e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 T - \frac{(2y-x)^2}{2T}} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(y-\mu T)^2}{2T}} - 2\mu e^{2\mu y} \Phi \left(-\frac{y + \mu T}{\sqrt{T}} \right), \\
F_{M_T^*}(y) &= \Phi \left(\frac{y - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu y} \Phi \left(-\frac{y + \mu T}{\sqrt{T}} \right), \; y > 0. \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

Na sličan način kao u poglavlju 4.3.1 pokaže se da je[3]

$$\mathbb{P}(m_T^* > y) = \Phi\left(-\frac{y-\mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{y+\mu T}{\sqrt{T}}\right),\ y<0.$$

Vratimo se sada na Primjer 4.19 s prošlog sata.

Primjer 4.19 (nastavak) Odredimo cijenu u trenutku 0 binarne *up-and-in* opcije s cijenom izvršenja K i barijerom b, $C = K1_{\{M_T>b\}}$, gdje je $M_t = \max_{s\in[0,t]} S_s$. Kao i prošli sat, koristimo formulu (4.24) za $t=0$ (sjetimo se $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$),

$$\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}K1_{\{M_T>b\}}] = e^{-rT}K\mathbb{P}^*\left(M_T > b\right) \\
&= e^{-rT}K\mathbb{P}^*\left(\max_{t\in[0,T]} S_0 \exp^{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \geq b\right) \\
&= e^{-rT}K\mathbb{P}^*\left(S_0 \exp^{\sigma \max_{t\in[0,T]}[B_t + \left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t]} \geq b\right) \\
&= e^{-rT}K\mathbb{P}^*\left(\max_{t\in[0,T]} \left[B_t + \left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t\right] \geq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}\right) \\
&= e^{-rT}K\mathbb{P}^*\left(\max_{t\in[0,T]} \left[B_t^* + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t\right] \geq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}\right) \\
&= e^{-rT}K\mathbb{P}^*\left(\max_{t\in[0,T]} \widetilde{B}_t \geq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}\right),
\end{aligned}$$

gdje je $\widetilde{B}_t = B_t^* + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t$ Brownovo gibanje s driftom $\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$. Označimo $\widetilde{M}_t = \max_{t\in[0,T]} \widetilde{B}_t$. Sada iz (4.48) imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\left(\widetilde{M}_T \geq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}\right) &= 1 - \mathbb{P}^*\left(\widetilde{M}_T \leq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} - \mu T}{\sqrt{T}}\right) + e^{2\mu\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}}\Phi\left(-\frac{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} + \mu T}{\sqrt{T}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} - (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})T}{\sqrt{T}}\right) + e^{2(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}}\Phi\left(-\frac{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})T}{\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} - (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})T}{\sqrt{T}}\right) + e^{(\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\ln\frac{b}{S_0}}\Phi\left(-\frac{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})T}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

[3] Raspišite izvod sami.

$$= \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{b}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Prema tome, slijedi da je

$$C_0 = Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{b}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right].$$

Na sličan način može se odrediti cijena ove opcije u trenutku t, korištenjem jednakosti

$$M_T = M_t + \max_{s\in[t,T]}(S_s - S_t),$$

no za to bi trebalo dodatno promotriti razdiobu izraza

$$\max_{s\in[t,T]}(S_s - S_t) \overset{(4.38)}{=} S_t\left(\max_{s\in[t,T]} e^{\sigma(B_s^* - B_t^*)+(r-\sigma^2/2)(s-t)} - 1\right)$$

uvjetno na $\mathcal{F}_t$. Uočimo da su S_t i M_t $\mathcal{F}_t$-izmjerive slučajne varijable te da je slučajna varijabla u zagradi u gornjem izrazu nezavisna od $\mathcal{F}_t$). Analogno bi se odredila i cijena call opcije s barijerom, ali zbog jako tehničkog računa, to nećemo učiniti.