Web predavanja - Financijsko modeliranje 2

Vanja Wagner (po skripti Z. Vondraček)

Predavanje 10 - 20.5.2020.

4.3 BSM model i vjerojatnost neutralna na rizik (nastavak)

Na prošlom satu smo pokazali da je, uz određene uvjete, svaki slučajni zahtjev u Black-Scholes-Mertonovom modelu dostižan, odnosno da je taj model financijskog tržišta potpun. Podsjetimo se, to smo učinili pod pretpostavkom da je volatilnost različita od nule i da je filtracija generirana Brownovim gibanjem. Time smo pokazali da za svaki slučajni zahtjev C postoji replicirajući portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0, T])$. Po jednakosti (4.24), cijena slučajnog zahtjeva i vrijednost replicirajućeg portfelja u trenutku $t \in [0, T]$ su jednake, $\Pi(C)_t = R_t \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t] = V_t^\phi$, pa su jednake i pripadne diskontirane vrijednosti, odnosno

$$M_t = \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t] = \widetilde{V}_t^\phi.$$

Sada iz Propozicije 4.9 i jednadžbe (4.34) slijedi da je jedan replicirajući portfelj za C dan s

$$\phi_t^1 = \frac{\Gamma_t^*}{\sigma_t D_t S_t},\ t \in [0, T].$$

Najveća nepoznanica u toj formuli je proces Γ_t^*. Teorem o reprezentaciji martingala daje egzistenciju tog procesa, ali ne daje formulu kojom se taj proces može izračunati.

Neka je sada ϕ proizvoljna samofinancirajuća strategija na tržištu. Promotrimo agenta koji kreće s početnim kapitalom V_0^ϕ, u svakom trenutku $t \in [0, T]$ drži ϕ_t^1 dionica, i ulaže ili posuđuje na tržištu novca uz promjenjivu kamatnu stopu r_t. Diferencijal vrijednosti V_t^ϕ agentovog portfelja izvodi se analogno kao i formula (3.2), s time što su α_t, σ_t i r_t sada slučajni. Dobivamo

$$
\begin{aligned}
dV_t^\phi &= \phi_t^1 \, dS_t + r_t(V_t^\phi - \phi_t^1 S_t)\, dt \\
&= \phi_t^1(\alpha_t S_t \, dt + \sigma_t S_t \, dB_t) + r_t(V_t^\phi - \phi_t^1 S_t)\, dt \\
&= r_t V_t^\phi \, dt + \phi_t^1(\alpha_t - r_t) S_t \, dt + \phi_t \sigma_t S_t \, dB_t \\
&\overset{(4.28)}{=} r_t V_t^\phi \, dt + \phi_t^1 \sigma_t S_t [\Theta_t \, dt + dB_t] \\
&= r_t V_t^\phi \, dt + \phi_t^1 \sigma_t S_t dB_t^* \, .
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

Analogno kao i jednakost (3.4), Itôva formula za produkt i (4.35) povlače da je

$$
d\widetilde{V}_t^\phi = d(D_t V_t^\phi) = \phi_t^1 \sigma_t D_t S_t dB_t^* . \tag{4.36}
$$

Kako je ϕ samofinancirajući, iz Propozicije 4.9 znamo da su promjene diskontirane vrijednosti portfelja u potpunosti posljedica promjena diskontiranih cijena dionice. Dodatno, iz (4.36) vidimo da je diskontirana vrijednost portfelja martingal s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Drugim riječima se to može izreći i ovako: agent može investirati na dva načina. Prvo, u tržište novca sa stopom povrata r_t, i drugo, u dionice čija je srednja stopa povrata (uz $\mathbb{P}^*$) također r_t. Dakle, bez obzira kako agent investira, srednja stopa povrata bit će r_t uz $\mathbb{P}^*$. Diskontiranjem pomoću D_t ta srednja stopa povrata pada na nulu, odnosno $\widetilde{V}_t^\phi$ je martingal s obzirom na $\mathbb{P}^*$.

Vratimo se na određivanje cijena slučajnih zahtjeva u Black-Scholes-Mertonovom modelu. Prvo ćemo pomoću formule (4.24) izvesti cijenu call-opcije $C = (S_T - K)_+$ s konstantnom volatilnošću $\sigma > 0$ i konstantnom kamatnom stopom $r > 0$.[1] Desna strana u (4.24) je tada jednaka

$$
\mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] .
$$

Budući da je proces vrijednosti dionice S Markovljev proces, vrijedi

$$
\mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ \,\middle|\, S_t \right] . \tag{4.37}
$$

Sjetimo se da je S_t dan formulom (4.32), koja je uz gornje pretpostavke na model oblika

$$
S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma B_t^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right\} ,
$$

[1] Uočite da srednja stopa povrata α ne ulazi u formulu za cijenu call opcije.

te zato S_T možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} S_T &= S_t \exp\left\{\sigma(B_T^* - B_t^*) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} \\ &= S_t \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

pri čemu je

$$Y := -\frac{B_T^* - B_t^*}{\sqrt{T-t}}$$

standardna normalna slučajna varijabla (uz $\mathbb{P}^*$), a $\tau := T - t$. Vidimo da je S_T produkt $\mathcal{F}_t$-izmjerive slučajne varijable S_t i slučajne varijable

$$\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\}$$

nezavisne od $\mathcal{F}_t$. Definirajmo

$$c(t,x) := \mathbb{E}^*\left[e^{-r\tau}\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)_+\right]. \tag{4.39}$$

Po Lemi 1.22 slijedi da je

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r\tau}\left(S_t\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)_+ \,\Big|\, S_t\right] = c(t, S_t)\,.$$

Iz ovog izraza, (4.37) slijedi da je

$$c(t, S_t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \,\big|\, \mathcal{F}_t)\right].$$

Dakle, preostaje izračunati funkciju $c(t,x)$ definiranu formulom (4.39). U prvom koraku koristimo distribuciju od Y uz $\mathbb{P}^*$, te dobivamo

$$c(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau}\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)_+ e^{-y^2/2}\,dy\,.$$

Uočimo da je integrand

$$\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)_+$$

pozitivan ako i samo ako je

$$y < d_-(\tau, x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log\frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right].$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
&c(t,x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau}\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,y + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right) e^{-y^2/2}\,dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} x\exp\left\{-\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right\} dy\\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau}Ke^{-y^2/2}\,dy\\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y+\sigma\sqrt{\tau})^2\right\} dy - e^{-r\tau}K\Phi(d_-(\tau,x))\\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)+\sigma\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz - e^{-r\tau}K\Phi(d_-(\tau,x))\\
&= x\Phi(d_+(\tau,x)) - e^{-r\tau}K\Phi(d_-(\tau,x)),
\end{aligned}$$

gdje smo stavili

$$d_+(\tau,x) := d_-(\tau,x) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right].$$

Time smo dobili rješenje Black-Scholes-Mertonove diferencijalne jednadžbe iz Teorema 3.7, ali sada korištenjem Girsanovljevog teorema i teorema o reprezentaciji martingala. Ovaj izvod nam daje uvid u proceduru kojom ćemo određivati cijene drugih zanimljivih slučajnih zahtjeva. Pogledajmo nekoliko primjera:

Primjer 4.18 (Binarne (digitalne) opcije) Kod binarnih opcija, isplata je jednaka ili nekom fiksnom pozitivnom iznosu ili je jednaka 0. Isplata u klasičnoj binarnoj opciji ovisi o terminalnoj cijeni dionice S_T. Općenito može ovisiti ne samo o terminalnoj, već recimo minimalnoj ili maksimalnoj cijeni do trenutka T (vidi sljedeći primjer). Promotrimo *cash-or-nothing call* opciju, odnosno binarnu opciju C s cijenom izvršenja $K > 0$ koja se isplaćuje u trenutku T ako je terminalna vrijednost dionice S_T iznad neke barijere $b > 0$, odnosno

$$C = K1_{\{S_T \geq b\}}.$$

Korištenjem Girsanovljevog teorema, odredimo cijenu slučajnog zahtjeva C u Black-Scholes-Mertonovom modelu s fiksnim parametrima $\alpha \in \mathbb{R}$ i $r, \sigma > 0$. Kao i maloprije za cijenu call opcije, koristimo formulu (4.24) i izraz (4.38), te Markovljevo svojstvo cijene dionice S,

$$\begin{aligned}
C_t &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}K1_{\{S_T \geq b\}}|\mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^*\left[1_{\{S_t \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} \geq b\}}|S_t\right],
\end{aligned}$$

gdje je $\tau = T - t$ i $Y \overset{\mathbb{P}^*}{\sim} N(0,1)$ nezavisna od S_t. Definiramo sada

$$c(t,x) := e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^*\left[1_{\{x \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} \geq b\}}\right].$$

Kako iz Leme 1.22 slijedi da je $C_t = c(t, S_t)$, ostaje nam još jedino odrediti izraz za $c(t,x)$:

$$\begin{aligned}
c(t,x) &= e^{-r(T-t)}K\mathbb{P}^*\left(x \exp^{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} \geq b\right) \\
&= e^{-r(T-t)}K\mathbb{P}^*\left(-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \geq \ln\frac{b}{x}\right) \\
&= e^{-r(T-t)}K\mathbb{P}^*\left(Y \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\frac{x}{b} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\right) \\
&= e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(\tau,x)).
\end{aligned}$$

Primjer 4.19 (Opcije s barijerom) Opcije s barijerom aktiviraju se, odnosno deaktiviraju, ako cijena dionice prijeđe neku barijeru (iznad ili ispod neke razine) **do** trenutka izvršenja T. Razlikujemo 4 osnova tipa takvih opcija, ovisno o

- smjeru pogađanja barijere (*UP* ako cijena naraste iznad nekog nivoa, odnosno *DOWN* ako cijena padne ispod nekog nivoa);
- akciji (*IN* ako se opcija pogađanjem barijere aktivira, *OUT* ako se opcija pogađanjem barijere deaktivira).

Tako je npr. *up-and-out call* opcija s cijenom izvršenja K i barijerom b jednaka

$$C = (S_T - K)_+ 1_{\{M_T > b\}}\text{[2]},$$

gdje je $M_t = \max_{s\in[0,t]} S_s$ najveća vrijednost dionice do trenutka t. Vidimo da se takva opcija deaktivira (out) prelaskom vrijednosti dionice iznad (up) razine b. Kao drugi primjer, promotrimo binarnu *up-and-in* opciju s cijenom izvršenja K i barijerom b,

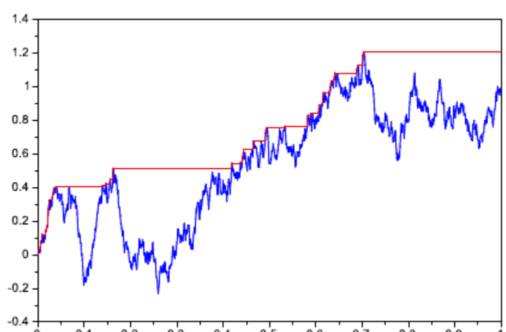
$$C = K 1_{\{M_T > b\}},$$

koja aktivira (in) isplatu K ako cijena dionice pređe iznad (up) razine b. U suprotnom će isplata biti 0, pa vidimo da je riječ o binarnoj opciji. Da bismo odredili cijenu ovih opcija, trebamo prvo odrediti razdiobu slučajne varijable M_t i slučajnog vektora (S_t, M_t), za $t \in [0, T]$.

4.3.1 Maksimum i minimum Brownovog gibanja

Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $M^B = (M_t^B : t \geq 0)$ proces maksimuma za B, odnosno

$$M_t^B = \max_{s\in[0,t]} B_s = \max_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} B_s.\text{[3]}$$



Slika 4.1: Grafički prikaz trajektorije Brownovog gibanja B (plavo) i pripadnog procesa maksimuma M^B (crveno).

[2]Uočimo da su, zbog neprekidne distribuiranosti vrijednosti dionice, događaji $\{M_T > b\}$ i $\{M_T \geq b\}$ jednako vjerojatni, pa je svejedno uzimamo li $>$ ili $\geq$.

[3]Uočite da promatrani maksimum možemo uzeti i samo po racionalnim trenutcima (druga jednakost), jer su po definiciji trajektorije Brownovog gibanja neprekidne.

Definirajmo prvo vrijeme pogađanja vrijednosti $a \in \mathbb{R}$ za B kao

$$T_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}.$$

Uočimo da za $a > 0$, zbog neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja i $B_0 = 0$, vrijedi

$$T_a = \inf\{t > 0 : B_t \geq a\}, \ T_{-a} = \inf\{t > 0 : B_t \leq -a\}. \tag{4.40}$$

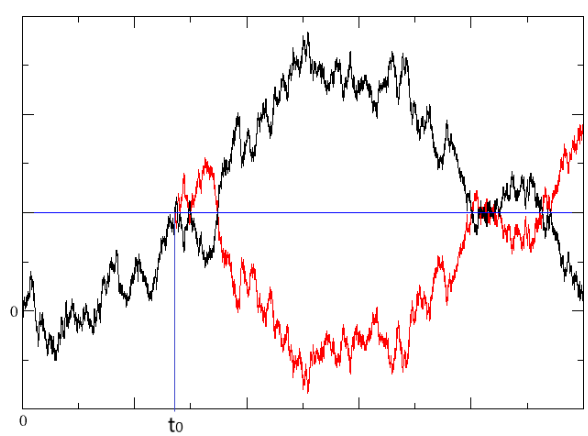
Nadalje, distribucija slučajne varijable M_t^B jedinstveno je određena razdiobom od T_a, jer je za svaki $a > 0$ i $t \geq 0$

$$\{M_t^B \geq a\} = \{T_a \leq t\}. \tag{4.41}$$

Distribuciju slučajne varijable M_t^B odredit ćemo korištenjem tzv. *principa refleksije*. Neka je $t_0 > 0$ fiksno vrijeme. Definiramo slučajni proces $W = (W_t : t \geq 0)$ kao

$$W_t = \begin{cases} B_t, & t \leq t_0 \\ B_{t_0} - (B_t - B_{t_0}), & t > t_0. \end{cases} \tag{4.42}$$

Uočimo da je proces W dobiven tako da od trenutka t_0 umjesto procesa B promatramo njegovu refleksiju s obzirom na os $y = B_{t_0}$.



Slika 4.2: Grafički prikaz trajektorije Brownovog gibanja B (crno) i pripadnog reflektiranog procesa W (crveno) obzirom na horizontalnu os $y = B_{t_0}$ (plavo). Do trenutka t_0, trajektorije procesa B i W se poklapaju.

Jednostavno se pokaže da je proces W Gaussovski i da je $\mathbb{E}[W_t W_s] = s \wedge t$, pa je W također Brownovo gibanje.[4] No ova tvrdnja vrijedi i općenitije, ako umjesto fiksnog vremena t_0 uzmemo proizvoljno konačno slučajno vrijeme zaustavljanja za Brownovo gibanje B.[5] Jedno takvo vrijeme zaustavljanja je T_a.[6] Korištenjem ove tvrdnje odredit ćemo razdiobu slučajne varijable M_t.

Teorem 4.20 *Za sve $t > 0$, slučajne varijable M_t^B i $|B_t|$ jednako su distribuirane,*

$$\mathbb{P}(M_t^B \leq x) = \mathbb{P}(|B_t| \leq x), \; x \in \mathbb{R}. \tag{4.43}$$

Dokaz: Kako je $M_t^B \geq B_0 = 0$, jednakost (4.43) trivijalno vrijedi za $x \leq 0$. Neka je sada $x > 0$ i $t > 0$. Zbog $\{B_t > x\} \subset \{M_t^B > x\}$, slijedi da je

$$\begin{aligned} \{M_t^B > x\} &= \{M_t^B > x, B_t > x\} \cup \{M_t^B > x, B_t \leq x\} \\ &= \{B_t > x\} \cup \{M_t^B > x, B_t \leq x\}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Nadalje, neka je slučajni proces W dobiven reflektiranjem Brownovog gibanja B u slučajnom vremenu T_x. Proces W dan je formulom (4.42), gdje umjesto fiksnog vremena t_0 imamo slučajno vrijeme T_x. Kako su W i B oboje Brownova gibanja, uočimo da su slučajni vektori (T_x, B_t) i (T_x^W, W_t)[7]jednako distribuirani. Stoga, primjenjujući relaciju (4.41) u prvoj jednakosti, dobivamo da je

$$\mathbb{P}(M_t^B > x, B_t \leq x) = \mathbb{P}(T_x \leq t, B_t \leq x) = \mathbb{P}(T_x^W \leq t, W_t \leq x). \tag{4.45}$$

No kako je $W_t = B_t$ za $t \leq T_x$ i B ima neprekidne trajektorije, slijedi da je $W_{T_x} = B_{T_x} = x$ pa je $T_x^W \leq T_x$. Prema tome, slijedi da je

$$\begin{aligned} T_x^W &= \inf\{t > 0 : W_t = x\} = \inf\{t \in (0, T_x] : W_t = x\} \\ &\overset{(4.42)}{=} \inf\{t \in (0, T_x] : B_t = x\} = T_x. \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti i (4.45) sada slijedi da je

$$\mathbb{P}(M_t^B > x, B_t \leq x) = \mathbb{P}(T_x \leq t, W_t \leq x) \overset{(4.42)}{=} \mathbb{P}(T_x \leq t, 2B_{T_x} - B_t \leq x)$$

[4]Za vježbu sami dokažite ovu tvrdnju.

[5]Ovu tvrdnju navodimo bez dokaza, koji se bazira na jakom Markovljevom svojstvu za Brownovo gibanje.

[6]Uočimo da je $\{T_a = \infty\} = \{B_t < a,$ za sve t>0$\}$. Kako je vjerojatnost drugog događaja 0, nužno je $\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$. Probajte ovu tvrdnju sami pokazati za vježbu.

[7]Ovdje je T_x^W prvo vrijeme pogađanja nivoa x za W, $T_x^W = \inf\{t > 0 : W_t = x\}$.

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(T_x \leq t, 2x - B_t \leq x) = \mathbb{P}(T_x \leq t, B_t \geq x) \\
&= \mathbb{P}(B_t \geq x), \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili jednakost (4.40) iz koje slijedi da je $\{B_t \geq x\} \subset \{T_x \leq t\}$. Sada iz (4.44) i (4.46) slijedi da je

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_t^B > x) &= \mathbb{P}(\{B_t > x\} \cup \{M_t^B > x, B_t \leq x\}) \\
&= \mathbb{P}(B_t > x) + \mathbb{P}(M_t^B > x, B_t \leq x) \\
&= 2\mathbb{P}(B_t > x) = \mathbb{P}(B_t > x) + \mathbb{P}(B_t < -x) \\
&= \mathbb{P}(\{B_t > x\} \cup \{B_t < -x\}) = \mathbb{P}(|B_t| > x),
\end{aligned}
$$

gdje smo u trećem redu koristili činjenicu da je B_t jednako distribuiran kao $-B_t$, odnosno simetriju normalne razdiobe s očekivanjem 0. Time je tražena tvrdnja dokazana. $\square$