Predavanje 1 - 18.3.2020.

1.3 Kvadratna varijacija (nastavak)

Definicija 1.17 *Neka su $X = (X_t : t \geq 0)$ i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni procesi. Kažemo da su X i Y* konačne kvadratne kovarijacije *ako postoji slučajni proces $\langle X, Y\rangle = (\langle X, Y\rangle_t : t \geq 0)$ t.d.*

$$(\mathbb{P}) \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) = \langle X, Y\rangle_t.$$

Slučajni proces $\langle X, Y\rangle$ zovemo kvadratna kovarijacija *od X i Y.*

Napomena 1.18 (a) Ako je proces $X = (X_t : t \geq 0)$ konačne kvadratne varijacije tada je $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$.

(b) Kvadratna kovarijacija je simetrična, tj. $\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$.

(c) Ako su $X = (X_t : t \geq 0)$ i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni procesi konačne kvadratne kovarijacije, onda su procesi $X+Y$ i $X-Y$ konačne kvadratne varijacije i vrijedi[1]

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{4}\left(\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t\right).$$

(d) Za slučajne procese $X = (X_t : t \geq 0)$, $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $Z = (Z_t : t \geq 0)$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ iz definicije kvadratne kovarijacije direktno slijedi

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z\rangle_t = \alpha\langle X, Z\rangle_t + \beta\langle Y, Z\rangle_t$$

Specijalno, $\langle \alpha X\rangle_t = \alpha^2\langle X\rangle_t$.

[1] Provjerite tvrdnju samostalno.

(e) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ neprekidan slučajni proces i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni proces konačne varijacije. Tada je $\langle X, Y \rangle_t = 0$. Uistinu,

$$\begin{aligned}
\langle X, Y \rangle_t &\leq \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_j} - X_{t_{j-1}}||Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \\
&\leq \lim_{||\Pi|| \to 0} \max_{1 \leq j \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^{n} |Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \\
&\leq V_t(Y) \lim_{||\Pi|| \to 0} \max_{1 \leq j \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 0,
\end{aligned}$$

pri čemu gornji maksimum teži u 0 kada $||\Pi|| \to 0$ jer su trajektorije od X neprekidne g.s.

Napomena 1.19 Iz Napomene 1.18(e) slijedi da je kvadratna kovarijacija funkcije $f(t) = t$ i Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ jednaka $\langle B, f \rangle_t = 0$. Analogno, slijedi da je kvadratna varijacija od f također nula. Ove dvije činjenice pišemo neformalno kao

$$dB_t\, dt = 0, \quad dt\, dt = 0\,.$$

Korištenjem ove notacije možemo neformalno zapisati i kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja kao $dB_t\, dB_t = d\langle B \rangle_t = dt$.

Definicija 1.20 *Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.* Geometrijsko Brownovo gibanje *je slučajni proces $S = (S_t : t \geq 0)$ definiran s*

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right\}\,.$$

Geometrijsko Brownovo gibanje služi kao model kretanja cijena dionica u Black-Scholes-Mertonovom modelu. Parametar σ ima interpretaciju *volatilnosti* i predstavlja mjeru varijacije cijene dionice na financijskom tržištu. Volatilnost je povezana s log-povratima dionice na sljedeći način. Neka su dani vremenski trenuci $0 \leq T_1 < T_2$, te pretpostavimo da opažamo geometrijsko Brownovo gibanje ("cijenu dionice") S_t za $T_1 \leq t \leq T_2$. Odaberimo particiju $\Pi = \{T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T_2\}$ tog intervala. Promotrimo log-povrate

$$\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} = \sigma(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{j+1} - t_j)$$

na svakom podintervalu $[t_j, t_{j+1}]$. Suma kvadrata log-povrata, koja se ponekad zove realizirana volatilnost, je

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1}\left(\log\frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right)^2 \\
&= \sigma^2\sum_{j=0}^{m-1}(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2 + \left(\alpha-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1}-t_j)^2 \\
&\quad +2\sigma\left(\alpha-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sum_{j=0}^{m-1}(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})(t_{j+1}-t_j)\,. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Pustimo $||\Pi|| \to 0$. Prvi član u gornjoj sumi konvergira prema $T_2 - T_1$, dok druga dva člana konvergiraju prema nuli. Zato je limes realizirane volatilnosti jednak $\sigma^2(T_2 - T_1)$. To znači da volatilnost možemo procijeniti pomoću formule

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T_2-T_1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\log\frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right)^2 .$$

1.4 Markovljevo svojstvo

U ovom odjeljku pokazat ćemo da Brownovo gibanje ima Markovljevo svojstvo. Kao prvi korak trebamo precizno definirati Markovljevo svojstvo za procese s neprekidnim parametrom. Ta definicija treba formalizirati intuitivno razumijevanje Markovljevog procesa kao onog čije ponašanje u budućnosti ovisi o prošlosti samo kroz sadašnje stanje.

Definicija 1.21 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija. Adaptiran slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ je* Markovljev proces*, ako za sve $0 \leq s \leq t$ i za sve Borel-izmjerive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji Borel-izmjeriva funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s] = g(X_s) \quad g.s. \qquad (1.2)$$

Riječima, uvjetno na informaciju poznatu u trenutku s, svaka funkcija pozicije procesa X u trenutku $t \geq s$ je funkcija pozicije procesa X u trenutku s.

Za dokaz Markovljevog svojstva Brownovog gibanja trebat će nam sljedeća lema koju navodimo bez dokaza.

Lema 1.22 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da je slučajna varijabla X $\mathcal{G}$-izmjeriva, te da je slučajna varijabla Y nezavisna od $\mathcal{G}$. Neka je $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija i definirajmo*

$$g(x) = \mathbb{E}[h(x, Y)] .$$

Tada je

$$\mathbb{E}[h(X, Y) \,|\, \mathcal{G}] = g(X) \quad g.s.$$

Teorem 1.23 *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je B Markovljev proces.*

Dokaz: Neka je $0 \leq s \leq t$, te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Trebamo pokazati da postoji Borelova funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$\mathbb{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(B_s) \quad g.s.$$

Vrijedi

$$\mathbb{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(B_s + (B_t - B_s)) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[h(B_s, B_t - B_s) \,|\, \mathcal{F}_s] ,$$

gdje je $h(x, y) = f(x+y)$. Uočimo da je B_s $\mathcal{F}_s$-izmjeriva, a $B_t - B_s$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$. Po Lemi 1.22 imamo

$$\mathbb{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(B_s) \quad g.s.,$$

gdje je

$$g(x) = \mathbb{E}[h(x, B_t - B_s)] = \mathbb{E}[f(x + (B_t - B_s))] .$$

To dokazuje Markovljevo svojstvo. Štoviše, g možemo točno izračunati. Zaista , $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ otkud slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w + x) e^{-\frac{w^2}{2(t-s)}} \, dw . \tag{1.3}$$

$\square$

Napomena 1.24 (i) Prethodnim teoremom smo u stvari pohazali da je Brownovo gibanje *vremenski homogen* Markovljev proces, odnosno da je za svaki $a > 0$ proces $(B_{t+a} - B_a : t \geq 0)$ Brownovo gibanje nezavisno s $\mathcal{F}_a$.

(ii) Zamjenom varijabli $\tau = t - s$ i $y = w + x$ u formuli (1.3) dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}\, dy\,.$$

Definirajmo *prijelaznu gustoću* $p(\tau, x, y)$ Brownovog gibanja formulom

$$p(\tau, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}\,.$$

Tada (1.3) možemo napisati kao

$$g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y) p(\tau, x, y)\, dy\,,$$

i konačno

$$\mathbb{E}[f(B_t)\,|\,\mathcal{F}_s] = \int_{-\infty}^\infty f(y) p(\tau, B_s, y)\, dy\,.$$

1.5 Distribucija vremena prvog prijelaza

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Definirajmo *vrijeme prvog prijelaza* nivoa x sa

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 \,:\, B_t = x\}\,.$$

U ovom odjeljku izračunat ćemo distribuciju tog slučajnog vremena. Vrijeme prvog prijelaza je vrijeme zaustavljanja u smislu da za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{\tau_x \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za Brownovo gibanje. U tom računu trebat će nam teorem o opcionalnom zaustavljanju koji navodimo bez dokaza.

Teorem 1.25 *(Teorem o opcionalnom zaustavljanju) Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ martingal, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $M^\tau = (M_{t\wedge\tau} : t \geq 0)$ opet martingal.*

Primjer 1.26 Neka je $-a < 0 < b$. Definiramo s $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (-a, b)\}$ prvo vrijeme izlaska Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ iz intervala $(-a, b)$. Pokaže se (vidi npr. (1.8)) da je $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

(i) Odredimo razdiobu slučajne varijable B_τ. Slučajna varijabla τ je uistinu vrijeme zaustavljanja (obzirom na Brownovsku filtraciju).[2] Stoga je po Teoremu 1.25 zaustavljeni proces B^τ martingal. Slijedi da je

$$\mathbb{E}[B_\tau] \overset{\text{LTDK}}{=} \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[B_t^\tau] = \mathbb{E}[B_0^\tau] = \mathbb{E}[B_0] = 0. \tag{1.4}$$

Uočimo da smo u prvoj jednakosti mogli koristiti teorem o dominiranoj konvergenciji jer je po definiciji od τ, $|B_t^\tau| \leq \max\{a, b\}$ g.s.. S druge strane, zbog neprekidnosti trajektorija g.s. Brownovog gibanja slijedi da je $|B_\tau| \in \{-a, b\}$ g.s. Stoga vrijedi da je

$$\begin{aligned} -a\mathbb{P}(B_\tau = -a) + b\mathbb{P}(B_\tau = b) = 0 \\ \mathbb{P}(B_\tau = -a) + \mathbb{P}(B_\tau = b) = 1, \end{aligned}$$

odnosno

$$\mathbb{P}(B_\tau = -a) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{P}(B_\tau = b) = \frac{a}{a+b}.$$

(ii) Odredimo sada $\mathbb{E}[\tau]$. Po rezultatu s predavanja znamo da je proces $W = (W_t : t \geq 0)$ definiran s $W_t = B_t^2 - t$ martingal, pa je po Teoremu 1.25 i proces W^τ martingal. Sličnim računom kao u (1.4)[3] slijedi da je $\mathbb{E}[W_\tau] = 0$. Stoga je

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^2] \overset{(i)}{=} a^2 \frac{b}{a+b} + b^2 \frac{a}{a+b} = ab.$$

Neka je $\sigma > 0$. Promotrimo sljedeći slučajni proces koji će biti od fundamentalnog značenja:

$$Z_t = \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}. \tag{1.5}$$

Sljedeći rezultat je posljedica Zadatka 6 iz 2. domaće zadaće.

Teorem 1.27 *(Eksponencijalni martingal) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, te neka je $\sigma > 0$. Slučajni proces Z definiran s (1.5) je martingal.*

[2] Tvrdnju provjerite sami.

[3] Račun provjerite sami.

Zaustavimo eksponencijalni martingal Z u vremenu prvog prijelaza τ_x. Zaustavljen proces je po teoremu o opcionalnom zaustavljanju opet martingal pa vrijedi

$$1 = Z(0) = \mathbb{E}[Z_{t\wedge\tau_x}] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\}\right]. \qquad (1.6)$$

Pretpostavimo da je $x > 0$. Do trenutka τ_x se Brownovo gibanje nalazi ispod x, odnosno, $B_{t\wedge\tau_x} \le x$. Zato je

$$0 \le \exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} \le e^{\sigma x}.$$

Ako je $\tau_x < \infty$, tada je $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\}$ za velike t. S druge strane, ako je $\tau_x = \infty$, tada je $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t\} \to 0$ za $t \to \infty$. To možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}.$$

Nadalje, ako je $\tau_x < \infty$, tada je $\lim_{t\to\infty}\exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} = \exp\{\sigma B_{\tau_x}\} = \exp\{\sigma x\}$. Ako je $\tau_x = \infty$, tada je $\exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} \le \exp\{\sigma x\}$ za sve $t \ge 0$. Međutim, to povlači da je na $\{\tau_x = \infty\}$,

$$\limsup_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} \le e^{\sigma x} \limsup_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 0.$$

Zato je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}.$$

Sada možemo pustiti $t \to \infty$ u formuli (1.6), te dobivamo

$$1 = \mathbb{E}\left[1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right],$$

(ovdje smo koristili Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji), odnosno ekvivalentno,

$$\mathbb{E}\left[1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}. \qquad (1.7)$$

Gornja jednakost vrijedi za sve $\sigma > 0$. Pustimo $\sigma \to 0$. Upotrebom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $\mathbb{E}[1_{\{\tau_x<\infty\}}] = 1$, t.j.,

$$\mathbb{P}(\tau_x < \infty) = 1\,. \tag{1.8}$$

Sada kada znamo da je τ_x konačan gotovo sigurno, možemo ga maknuti iz formule (1.7) i dobiti

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}\,. \tag{1.9}$$

Iz te formule možemo lagano dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.28 *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je prvo vrijeme prijelaza nivoa x konačno gotovo sigurno. Nadalje, Laplaceova transformacija distribucije od τ_x je*

$$\mathbb{E}e^{-\alpha\tau_x} = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,. \tag{1.10}$$

Dokaz: Promatrajmo prvo slučaj $x > 0$. Stavimo li $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ u (1.9), dobivamo formulu (1.10). Za $x < 0$, formula slijedi iz simetrije Brownovog gibanja. $\square$

Deriviramo li formulu (1.10) po α dobivamo

$$\mathbb{E}[\tau_x e^{-\alpha\tau_x}] = \frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Pustimo li $\alpha \downarrow 0$ slijedi $\mathbb{E}[\tau_x] = \infty$, $x \neq 0$.

Neka F označava funkcije distribucije od τ_x. Uočite da je $F(t) = 0$ za $t \leq 0$. Formula (1.10) može se zapisati kao

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dF(t) = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Direktnim računanjem može se pokazati da vrijedi sljedeća formula:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dt = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Uspoređivanjem posljednje dvije formule slijedi da je funkcija distribucije F apsolutno neprekidna s funkcijom gustoće

$$f_{\tau_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\,.$$

Kažemo da τ_x ima Lévyjevu razdiobu. Dodatno vrijedi $\mathbb{E}[\tau_x] = +\infty$.[4]

[4]Provjerite tvrdnju sami.