FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Sažetak. Ovo su materijali za kolegij Financijsko modeliranje 2. Čitatelje koji uoče greške bilo kakve prirode molimo da na njih ukažu putem maila. Isto vrijedi i za sve komentare i sugestije koje bi mogle poboljšati izlaganje sadržaja.

Sadržaj

1. Brownovo gibanje

U ovom ćemo poglavlju uvesti pojam Brownovog gibanja, odnosno slučajni proces koji čini osnovu za modeliranje kretanja cijena rizičnih imovina na financijskim tržištima neprekidnim u vremenu. Ti modeli su zapravo vremenski neprekidni analogoni odgovarajućih (diskretnih) skaliranih Cox-Ross-Rubinsteinovih modela, gdje se cijena rizične imovine modelira preko odgovarajućih simetričnih slučajnih šetnji. Kao osnovu za tu aproksimaciju, prvo ćemo dati (neformalni) prikaz aproksimacije Brownovog gibanja preko skaliranih slučajnih šetnji.

1.1. **Skalirana slučajna šetnja.** Prisjetimo se definicije jednostavne simetrične slučajne šetnje: neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $(X_n : n \in \mathbf{N})$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima ± 1 s parametrom $p = 1/2$ definiranih na tom prostoru. Konkretno, za Ω možemo uzeti beskonačni produkt $\{-1, 1\}^\infty$, za $\mathcal{F}$ cilindarsku σ-algebru, a za $\mathbf{P}$ produktnu vjerojatnost. Simetrična slučajna šetnja je slučajni proces $M = (M_n : n \in \mathbf{N}_0)$ definiran s $M_0 = 0$, te

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Podsjetimo se osnovnih svojstava jednostavne simetrične slučajne šetnje M:

Posljednja izmjena: 14. travnja 2021.

- Slučajna šetnja ima **nezavisne priraste**. To znači da su za svaki $m \in \mathbf{N}$ i sve nenegativne cijele brojeve $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m$ slučajne varijable
$$M_{k_1} = M_{k_1} - M_{k_0}, M_{k_2} - M_{k_1}, \ldots, M_{k_m} - M_{k_{m-1}} ,$$
nezavisne. Slučajnu varijablu
$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$
nazivamo **prirast** slučajne šetnje od trenutka k_i do k_{i+1}.
- Nadalje, očekivanje prirasta $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ je nula, dok je varijanca tog priraste jednaka $k_{i+1} - k_i$. Zaista,
$$\mathrm{Var}(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \mathrm{Var}(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \mathrm{Var}(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i \, .$$
Uočimo da se varijanca akumulira brzinom jedan po jedinici vremena. Dakle, varijanca prirasta kroz vremenski interval od k do l, $k < l$, bit će jednaka $l - k$.
- Označimo sa $\mathcal{F}_k$ σ-algebru generiranu s $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Primjetimo da je to σ-algebra jednaka σ-algebri generiranoj s $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Dakle, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k : k \in \mathbf{N}_0)$ je prirodna filtracija slučajne šetnje M. Simetrična slučajna šetnja M je **martingal** u odnosu na $\mathbf{F}$. Naime, za nenegativne cijele brojeve $k < l$ vrijedi:
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[M_l \,|\, \mathcal{F}_k] &= \mathbf{E}[(M_l - M_k) + M_k \,|\, \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbf{E}[M_l - M_k \,|\, \mathcal{F}_k] + \mathbf{E}[M_k \,|\, \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbf{E}[M_l - M_k \,|\, \mathcal{F}_k] + M_k \quad (\text{zbog } M_k \text{ je } \mathcal{F}_k \text{ izmjeriva}) \\
&= \mathbf{E}[M_l - M_k] + M_k \quad (\text{zbog } M_l - M_k \text{ nezavisna od } \mathcal{F}_k) \\
&= M_k \, . \qquad (1.1)
\end{aligned}$$
- **Kvadratna varijacija** slučajne šetnje M je slučajni proces $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_k : k \in N)$ definiran s
$$\langle M \rangle_k := \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_{j-1})^2 \, .$$
Uočimo da je svaki član u gornjoj sumi jednak 1, te je trivijalno $\langle M \rangle_k = k$. Uočimo:kvadratna varijacija računa se po svakom putu slučajne šetnje ($\langle M \rangle_k$ je slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ koja je jednaka konstanti k). S druge strane, $\mathrm{Var}(M_k)$ je također jednaka k, ali se računa usrednjenjem po svim putevima. U slučaju nesimetrične slučajne šetnje,
$$\mathbf{P}(X_j = 1) = p, \; \mathbf{P}(X_j = -1) = q := 1 - p,$$
kvadratna varijacija u trenutku k je i dalje jednaka k, dok je $\mathrm{Var}(M_k) = 4pqk$. Kod računanja kvadratne varijacije ključno je da vjerojatnosti prirasta ne ulaze u račun. Ako je dan put slučajne šetnje (realizacija šetnje za dani $\omega \in \Omega$), iz tog puta možemo izračunati kvadratnu varijaciju (za taj put).

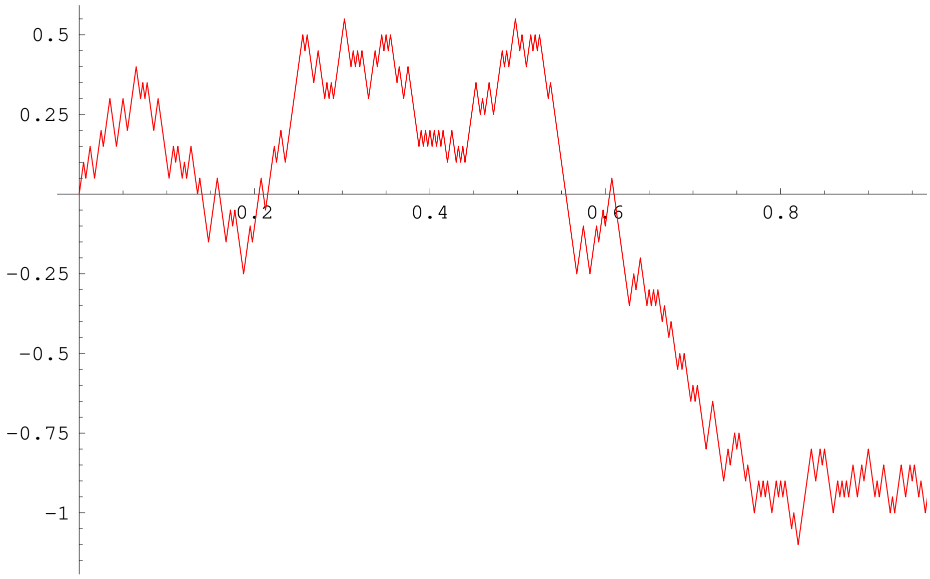
Za aproksimaciju Brownovog gibanja trebamo ubrzati vrijeme i smanjiti korak slučajne šetnje. Za fiksni $n \in \mathbf{N}$ slučajni proces $B^{(n)} = (B_t^{(n)} : t \geq 0)$ definiran s

$$B_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{[nt]+1} - M_{[nt]})(nt - [nt]), \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

zovemo **skalirana slučajna šetnja**. Uočimo da je za fiskni $\omega \in \Omega$, $t \mapsto B_t^{(n)}(\omega)$ je neprekidna funkcija te da za $t \in T_n := \{t \geq 0 : tn \in \mathbf{Z}\}$ vrijedi

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt} \, . \tag{1.3}$$

Za $\omega \in \Omega$ (neprekidnu) funkciju $t \mapsto B_t^{(n)}(\omega)$ s $\mathbf{R}_+$ u $\mathbf{R}$ zovemo **put** (trajektorija) skalirane slučajne šetnje za dani ω. Brownovo gibanje ćemo neformalno konstruirati kao limes skalirane slučajne šetnje $B^{(n)}$ kada $n \to \infty$. Na Slici 1. prikazana je simulacija puta od $B^{(400)}$ do vremena 1. Taj put generiran je pomoću 400 realizacija simetričnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima $\pm 1/20$.



SLIKA 1.

Promotrimo sada svojstva skalirane slučajne šetnje $B^{(n)}$:

- Skalirana slučajna šetnja ima nezavisne priraste. Zaista, neka su $m \in \mathbf{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ takvi da $t_j \in T_n$. Tada su slučajne varijable

$$B_{t_1}^{(n)} - B_{t_0}^{(n)}, B_{t_2}^{(n)} - B_{t_1}^{(n)}, \ldots, B_{t_m}^{(n)} - B_{t_{m-1}}^{(n)}$$

  nezavisne. To je zato jer te slučajne varijable ovise o različitim Bernoullijevim varijablama X_j. Na primjer,

$$B_{t_{i+1}}^{(n)} - B_{t_i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(M_{nt_{i+1}} - M_{nt_i}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=nt_i+1}^{nt_{i+1}} X_j \, .$$

  Upotrebom formule (1.2), može se pokazati nezavisnost prirasta i za općenite $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$.[1]

[1]Provjerite tvrdnju sami za vježbu.

- Za $t \geq 0$ je
$$\mathbf{E}[B_t^{(n)}] = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{E} M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{E} M_{[nt]+1} - \mathbf{E} M_{[nt]})(nt - [nt]) = 0.$$
Nadalje, za $t \geq s$ takve da je $t, s \in T_n$ vrijedi
$$\mathrm{Var}(B_t^{(n)} - B_s^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{j=ns+1}^{nt} 1 = t - s\,.$$
- Za $t \geq 0$ slučajna varijabla $B_t^{(n)}$ je izmjeriva u odnosu na σ-algebru
$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u^{(n)} : 0 \leq u \leq t).$$
Neka su $s, t \in T_n$, $s \leq t$. Tada je $\mathcal{F}_s = \sigma(M_u : 0 \leq u \leq ns)$ pa je slučajna varijabla $B_t^{(n)} - B_s^{(n)}$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$. Sada se na isti način kao i za slučajnu šetnju dokazuje martingalno svojstvo skalirane slučajne šetnje $(B_t^{(n)} : t \in T_n)$, odnosno da za sve $s \leq t$, $s, t \in T_n$ vrijedi
$$\mathbf{E}[B_t^{(n)} \,|\, \mathcal{F}_s] = B_s^{(n)}.$$
- Izračunajmo još i kvadratnu varijaciju skalirane slučajne šetnje $(B_t^{(n)} : t \in T_n)$. U trenutku $t \in T_n$ je
$$\langle B^{(n)} \rangle_t \;:=\; \sum_{j=1}^{nt} \left[B_{\frac{j}{n}}^{(n)} - B_{\frac{j-1}{n}}^{(n)} \right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} X_j \right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t\,. \tag{1.4}$$

Teorem 1.1. *(Centralni granični teorem) Za $t \geq 0$ vrijedi*
$$B_t^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{(D)} N(0, t).$$

Skica dokaza: Dokaz ćemo provesti samo za $t \in \mathbf{Q}$ i specijalni podniz niza $(B_t^{(n)} : n \in \mathbf{N})$. Uočimo da za $t \in \mathbf{Q}$ postoji niz $(n_k : k \in \mathbf{N})$ prirodnih brojeva t.d. $n_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$ i $t \in T_{n_k}$ za sve $k \in \mathbf{N}$.

Označimo s $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ n-tu parcijalnu sumu niza X nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli. Slijedi da je $\mathbf{E}[S_n] = n\mathbf{E}[X_1] = 0$ i $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n$. Prema tome je
$$B_t^{(n_k)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n_k}} \sum_{j=1}^{n_k t} X_j = \frac{S_{n_k t}}{\sqrt{n_k}} = \frac{S_{n_k t} - \mathbf{E}[S_{n_k t}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_{n_k t})}} \cdot \sqrt{t}\,.$$
Sada primjenom centralnog graničnog teorema na niz parcijalnih suma $(S_{n_k t} : k \in \mathbf{N})$ slijedi da je za svaki $x \in \mathbf{R}$
$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{P}(B_t^{(n_k)} \leq x) = \lim_{k \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_{n_k t} - \mathbf{E}[S_{n_k t}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_{n_k t})}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}} \right) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy = \mathbf{P}(N(0, t) \leq x)\,.$$
□

Sada ćemo pomoću gornjeg centralnog graničnog teorema pokazati da limes odgovarajućeg skaliranog Cox-Ross-Rubinsteinovog modela vodi prema cijenama dionica koje imaju log-normalnu distribuciju. Zbog jednostavnosti promatramo CRR model u kojem je kamatna stopa $r = 0$. Fiksirajmo vrijeme $t \geq 0$. Promatrat ćemo CRR model sa $n \in \mathbf{N}$ promjena cijena dionice po jedinici vremena. Tada se do trenutka $t \in T_n$ cijena dionice promjeni nt puta. Označimo s a_n, odnosno b_n, relativne promjene cijene dionice. Odaberimo te relativne promjene cijena na sljedeći način: neka je $\sigma > 0$ konstanta, i stavimo

$$a_n = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \quad b_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Znamo da uz ove parametre modela postoji jedinstvena vjerojatnost neutralna na rizik, te je

$$\hat{p}_n = \frac{r - a_n}{b_n - a_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}, \quad \hat{q}_n = \frac{b_n - r}{b_n - a_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\,.$$

Neka su sada $(X_j : j \in \mathbf{N})$ nezavisne simetrične Bernoullijeve slučajne varijable s vrijednostima ± 1. Označimo kao i prije sa M_{nt} slučajnu šetnju u trenutku nt: $M_{nt} = \sum_{j=1}^{nt} X_j$. Tada je

$$G_{nt} := \frac{1}{2}(nt + M_{nt})$$

broj jedinica u nizu $(X_j : 1 \leq j \leq nt)$, a

$$D_{nt} := \frac{1}{2}(nt - M_{nt})$$

broj minus jedinica u nizu $(X_j : 1 \leq j \leq nt)$. Ako je S_0 početna cijena dionice, tada je cijena dionice $S_n(t)$ u trenutku t (dakle, nakon nt koraka) jednaka

$$\begin{aligned} S_n(t) &= S_0(1 + b_n)^{G_{nt}}(1 + a_n)^{D_{nt}} \\ &= S_0 \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt+M_{nt})} \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt-M_{nt})}\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Teorem 1.2. *Kada $n \to \infty$, distribucija od $S_n(t)$ u (1.5) konvergira prema distribuciji od*

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\}\,, \tag{1.6}$$

gdje je B_t normalna slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom t.

Skica dokaza: Gornju tvrdnju ćemo kao i prije pokazati za $t \in \mathbf{Q}$ i podniz $(S_{n_k}(t) : k \in \mathbf{N})$ takav da je $t \in T_{n_k}$ za sve $k \in \mathbf{N}$. Također, dovoljno je pokazati da distribucija od

$$\log S_n(t) = \log S_0 + \frac{1}{2}(nt + M_{nt}) \log\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}(nt - M_{nt}) \log\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{1.7}$$

konvergira prema distribuciji od

$$\log S_t = \log S_0 + \sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\,.$$

Po Taylorovoj formuli imamo

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

gdje je član $O(x^3)$ reda x^3. Primjenimo gornji razvoj na (1.7) uzimajući prvo $x = \sigma/\sqrt{n}$, a zatim $x = -\sigma/\sqrt{n}$. Uočimo da je $O((\pm\sigma/\sqrt{n})^3) = O(n^{-3/2})$. Zato je za $n \in \mathbf{N}$ takav da je

$t \in T_n$

$$\begin{aligned}\log S_n(t) &= \log S_0 + \frac{1}{2}(nt + M_{nt})\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}(nt - M_{nt})\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right)\\ &= \log S_0 + nt\left(-\frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) + M_{nt}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2})\right)\\ &= \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + O(n^{-1/2}) + \sigma B_t^{(n)} + O(n^{-1})B_t^{(n)}\,.\end{aligned}$$

Po Teoremu 1.1, distribucija od $B_t^{(n_k)}$ konvergira kada $k \to \infty$ prema distribuciji od B_t (centrirana normalna slučajna varijabla s varijancom t). Nadalje, izraz $O(n_k^{-1})B_t^{(n_k)}$ je produkt nečega što konvergira prema normalnoj distribuciji i člana $O(n_k^{-1})$ koji teži prema nuli. Zato i produkt $O(n_k^{-1})B_t^{(n_k)}$ teži prema nuli kada $k \to \infty$.[2] Zaključujemo da kad $k \to \infty$, distribucija od $\log S_{n_k}(t)$ teži prema distribuciji od $\log S_0 + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$. □

Definicija 1.3. Za slučajnu varijablu $X > 0$ kažemo da ima **lognormalnu distribuciju**, ako slučajna varijabla $Y = \log X$ ima normalnu distribuciju.

Ekvivalentno, ako Y ima normalnu distribuciju, tada $X = e^Y$ ima lognormalnu distribuciju. Pretpostavimo da je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajmo funkciju gustoće slučajne varijable $X = e^Y$: za $x > 0$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \le x) &= \mathbf{P}(Y \le \log x)\\ &= \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\log u-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\,\frac{du}{u}\,.\end{aligned}$$

otkud slijedi da je

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\,, \quad x > 0\,.$$

1.2. **Brownovo gibanje.** Brownovo gibanje je limes skaliranih slučajnih šetnji $B_t^{(n)}$ kada $n \to \infty$, te stoga nasljeđuje svojstva tih skaliranih slučajnih šetnji. To vodi na sljedeću definiciju:

Definicija 1.4. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $B = (B_t,\, t \ge 0)$ je **Brownovo gibanje** ako vrijedi:

(i) Putovi $t \mapsto B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbf{R}_+$ u $\mathbf{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).
(ii) $B_0 = 0$.
(iii) Za sve $m \in \mathbf{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.
(iv) Za sve $0 \le s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.

[2] Uvjerite se sami u ovu tvrdnju.

Prisjetimo se da skalirana slučajna šetnja $B_t^{(n)}$ ima prirodan vremenski korak $1/n$, te je linearna između dva konsekutivna vremenska koraka. Brownovo gibanje nema linearnih dijelova. Nadalje, distribucija skalirane slučajne šetnje u trenutku $t > 0$ je približno normalna (Teorem 1.1), dok je distribucija Brownovog gibanja upravo normalna $N(0, t)$.
Odredimo sada distribuciju slučajnog vektora $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. Uočimo da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ B_{t_3} - B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_m} - B_{t_{m-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ B_{t_3} \\ \vdots \\ B_{t_m} \end{bmatrix}$$

Budući da su slučajne varijable $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ nezavisne i normalne, to je $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ normalni slučajni vektor. Zato je i $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$ normalni slučajni vektor kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora. Da bismo u potpunosti odredili distribuciju vektora $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$, moramo izračunati kovarijacijsku matricu (vektor očekivanja je očito nula).
Neka je $0 \le s < t$. Kovarijanca od B_s i B_t jednaka je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[B_s B_t] &= \mathbf{E}[B_s(B_t - B_s) + B_s^2] \\ &= \mathbf{E}[B_s] \cdot \mathbf{E}[B_t - B_s] + \mathbf{E}[B_s^2] \quad \text{(nezavisnost prirasta)} \\ &= 0 + \mathrm{Var} B_s = s\,. \end{aligned}$$

Slijedi da je kovarijacijska matrica normalnog slučajnog vektora $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$ jednaka

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Na taj način smo dokazali implikaciju $(a) \Rightarrow (b)$ sljedećeg teorema[3]:

Teorem 1.5. *(Alternativna karakterizacija Brownovog gibanja) Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *vjerojatnosni prostor, te neka je* $B = (B_t,\, t \ge 0)$ *slučajni proces takav da su putovi* $t \mapsto B_t(\omega)$ *neprekidni za g.s.* $\omega \in \Omega$ *i* $B_0 = 0$. *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) Za sve $m \in \mathbf{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem nula i varijancom $\mathrm{Var}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

(b) Za sve $m \in \mathbf{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *slučajni vektor* $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$ *ima normalnu distribuciju s vektorom očekivanja nula i kovarijacijskom matricom (1.8).*

Osim samog slučajnog procesa, bit će nam potrebna i informacija vezana uz taj proces. Zato uvodimo pojam filtracije za Brownovo gibanje.

[3] Obrat dokažite sami za vježbu.

Definicija 1.6. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom prostoru. **Filtracija** za Brownovo gibanje je familija $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ σ-algebri koja zadovoljava

(i) Za sve $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ (informacija kasnije ne može biti manja od informacije ranije).
(ii) (Adaptiranost) Za svaki $t \geq 0$, B_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla (informacija dostupna u trenutku t dovoljna je za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku).
(iii) (Nezavisnost budućih prirasta) Za sve $0 \leq s < t$, prirast $B_t - B_s$ nezavisan je od $\mathcal{F}_s$ (svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena s nezavisan je od informacije dostupne u trenutku s).

Tipičan primjer filtracije za Brownovo gibanje je prirodna filtracija Brownovog gibanja definirana s $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\, 0 \leq s \leq t)$. U tom slučaju, informacija u trenutku t sadrži informaciju o Brownovom gibanju do trenutka t i ništa više.
Slično kao i slučajna šetnja, i Brownovo gibanje ima martingalno svojstvo. Definirajmo prvo pojam martingala s neprekidnim vremenom.

Definicija 1.7. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ filtracija. Slučajni proces $M = (M_t,\, t \geq 0)$ je *martingal* ako vrijedi:

(i) M je $\mathbf{F}$-adaptiran,
(ii) za sve $t \geq 0$, $\mathbf{E}|M_t| < \infty$,
(iii) za sve $0 \leq s \leq t$, $\mathbf{E}[M_t \,|\, \mathcal{F}_s] = M_s$ g.s.

Teorem 1.8. *Brownovo gibanje je martingal (s obzirom na filtraciju za to Brownovo gibanje).*

Dokaz. Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[B_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[B_t - B_s + B_s \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbf{E}[B_t - B_s \,|\, \mathcal{F}_s] + \mathbf{E}[B_s \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbf{E}[B_t - B_s] + B_s \quad (\text{nezavisnost } B_t - B_s \text{ od } \mathcal{F}_s) \\
&= B_s\,.
\end{aligned}$$

□

1.3. **Kvadratna varijacija.** Kvadratnu varijaciju skalirane slučajne šetnje $B^{(n)}$ do trenutka T izračunali smo u (1.4), te smo dobili da je jednaka T. Prisjetimo se da je ta kvadratna varijacija bila izračunata tako da smo uzeli sve korake skalirane slučajne šetnje od 0 do T, kvadrirali ih, te zbrojili. Kod Brownovog gibanja nemamo prirodnu veličinu koraka. Za dani $T > 0$ možemo odabrati veličinu koraka, npr. T/n, i izračunati kvadratnu varijaciju za tu veličinu koraka. Preciznije, možemo računati

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[B_{\frac{(j+1)T}{n}} - B_{\frac{jT}{n}} \right]^2 .$$

Zanimat će nas taj izraz za male veličine koraka, te ćemo zato pustiti $n \to \infty$. Kao limes dobit ćemo opet T, duljinu vremenskog intervala na kojem računamo kvadratnu varijaciju. To je glavni rezultat ovog odjeljka.

Prije nego što definiramo kvadratnu varijaciju, pogledajmo prvo poznatiji koncept varijacije (odn. varijacije prvog reda). Neka je $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ funkcija. Particija intervala $[0,T]$ je skup $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ točaka takvih da je $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = T$. Dijametar particije Π je najveća veličina koraka: $||\Pi|| := \max_{j=0,1,\dots,n-1}(t_{j+1} - t_j)$. **Varijacija prvog reda** funkcije f na intervalu $[0,T]$ definira se kao

$$V_T(f) := \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \,. \tag{1.9}$$

Ako je taj limes konačan, za funkciju f kažemo da je konačne varijacije na $[0,T]$. Slučajni proces je konačne varijacije ako su mu trajektorije $\mathbf{P}$-g.s. konačne varijacije.

Napomena 1.9. (i) Primijetimo da je monotona funkcija f uvijek konačne varijacije, te da je $V_T(f) = |f(T) - f(0)|$.

(ii) Može se pokazati da je f konačne varijacije na $[0,T]$ ako i samo ako je f razlika dvije neopadajuće funkcije.

(iii) Neka je $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ funkcija klase C^1 na $[0,T]$. Tada je

$$V_T(f) = \int_0^T |f'(t)| \, dt \,.$$

Da bismo to pokazali, uzmimo $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ proizvoljnu particiju intervala $[0,T]$. Po teoremu srednje vrijednosti, za svaki $j = 0,1,\dots,n-1$, postoji $t_j^* \in (t_j, t_{j+1})$ takav da je $f(t_{j+1}) - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j)$. Zato je

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j) \,.$$

Međutim, gornji izraz je Riemannova suma funkcije f' na intervalu $[0,T]$. Budući da je f' Riemann integrabilna, gornje Riemannove sume konvergiraju, kada $||\Pi|| \to 0$ prema integralu $\int_0^T |f'(t)| \, dt$.

Sljedeći rezultat povlači da je Brownovo gibanje slučajni proces beskonačne varijacije.

Propozicija 1.10. *Neprekidni martingal je konačne varijacije ako i samo ako je konstantan.*

Dokaz. $\Leftarrow$ Trivijalno.
$\Rightarrow$ Neka je $M = (M_t, t \geq 0)$ neprekidni martingal konačne varijacije. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $M_0 = 0$ (u suprotnom tvrdnju dokazujemo za neprekidni martingal $\widehat{M} := (M_t - M_0, t \geq 0)$). Također, možemo pretpostaviti da su i martingal M i njegova varijacija ograničeni, odnosno da postoji $K > 0$ takav da je za sve $t > 0$

$$|M_t|, \, V_t(M) < K.$$

Naime, ako za $N > 0$ definirajmo vrijeme zaustavljanja $S_N = \inf\{s > 0 : V_s(M) > N\}$, tada je zaustavljeni proces M^{S_N} također martingal[4] i vrijedi

$$|M_t^{S_N}| \leq V_t(M^{S_N}) \leq N,$$

[4] Po verziji teorema o zaustavljanom martingalu za vremenski neprekindne martingale.

pa možemo umjesto martingala M promatrati zaustavljene martingale M^{S_N}, $N \in \mathbf{N}$.[5] Neka je $t > 0$ i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t\}$ particija intervala $[0, t]$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2] &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[M_{t_i} M_{t_{i-1}}] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[\mathbf{E}[M_{t_i} M_{t_{i-1}} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= (M_{t_{i-1}} \text{ je } \mathcal{F}_{t_{i-1}}\text{-izmjeriva}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[M_{t_{i-1}} \mathbf{E}[M_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= (M \text{ je martingal}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) = \mathbf{E}[M_t^2].
\end{aligned}$$

Prema tome, kako je $\sum_{i=1}^{n} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \leq V_t(M)$, slijedi da je

$$\mathbf{E}[M_t^2] \leq \mathbf{E}[\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\} V_t(M)] \leq K\mathbf{E}[\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\}].$$

Kako ova nejednakost vrijedi za svaku particiju Π, po teoremu o dominiranoj konvergenciji[6] slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[M_t^2] &\leq K \lim_{||\Pi|| \to 0} \mathbf{E}[\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\}] \\
&= K\mathbf{E}\left[\lim_{||\Pi|| \to 0} \sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\}\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz neprekidnosti martingala M. Kako je $M_t^2 \geq 0$, slijedi da je $\mathbf{E}[M_t^2] = 0$, odnosno $M_t = 0$ g.s. za sve $t > 0$. □

Sada ćemo definirati kvadratnu varijaciju funkcije f definirane na $[0, T]$.

Definicija 1.11. Neka je $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ funkcija. **Kvadratna varijacija** od f na intervalu $[0, T]$ definira se kao

$$[f, f](T) := \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 .$$

Za f kažemo da je konačne kvadratne varijacije na $[0, T]$ ako gornji limes postoji i konačan je. Slučajni proces $X = (X_t, t \geq 0)$ je konačne kvadratne varijacije ako postoji slučajan proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t, t \geq 0)$ takav da je

$$\langle X \rangle_T = (P) \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|^2 . \tag{1.10}$$

Proces $\langle X \rangle$ zovemo proces kvadratne varijacije od X.

[5] Za vježbu dokažite: M^{S_N} je konstantan za sve $N \in N$ povlači M je konstantan proces.

[6] Iz omeđenosti martingala M slijedi da je $\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\} \leq 2K$.

Pretpostavimo da je f klase C^1 na $[0,T]$. Tada je kao i u dokazu Napomene 1.9 (iii)

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1}-t_j)^2 \le ||\Pi|| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1}-t_j)\,.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
[f,f](T) &\le \lim_{||\Pi||\to 0} \left[||\Pi|| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1}-t_j) \right] \\
&= \lim_{||\Pi||\to 0} ||\Pi|| \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1}-t_j) \\
&= \lim_{||\Pi||\to 0} ||\Pi|| \cdot \int_0^T |f'(t)|^2\, dt = 0\,.
\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili da je $|f'|^2$ neprekidna, pa stoga i integrabilna, na $[0,T]$. Gornji račun pokazuje da većina funkcija na koje smo naviknuti ima kvadratnu varijaciju nula. Stoga se kvadratna varijacija nikada ne proučava u diferencijalnom računu. S druge strane, može se pokazati da putovi Brownovog gibanja nisu diferencijabilne funkcije. Preciznije, vrijedi sljedeći rezultat: za g.s. $\omega \in \Omega$, funkcija $t \mapsto B_t(\omega)$ nije diferencijabilna niti u jednoj točki. To znači da niti u jednoj točki $t \ge 0$ ne možemo definirati $\frac{d}{dt}B_t$. Međutim, takvo "neobično" svojstvo Brownovskih putova sugerira da bi kvadratna varijacija putova mogla biti različita od nule.

Teorem 1.12. *Neka je B Brownovo gibanje. Tada je $\langle B\rangle_T = T$ za sve $T \ge 0$ gotovo sigurno.*

Dokaz. Za $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ particiju intervala $[0,T]$ označimo

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\,.$$

Pokazat ćemo da vrijedi konvergencija u srednjem

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \mathbf{E}[(Q_\Pi - T)^2] = 0\,.^7 \tag{1.11}$$

Poznato je da ako niz konvergira u srednjem, tada postoji podniz (particija) tako da taj podniz konvergira gotovo sigurno. To nam daje tvrdnju teorema.
Da bismo dokazali (1.11), potrebni su nam drugi i četvrti moment normalne slučajne varijable $X \sim N(0,t)$:

$$\mathbf{E}[X^2] = t\,, \tag{1.12}$$
$$\mathbf{E}[X^4] = 3t^2\,. \tag{1.13}$$

Slijedi:

$$\mathbf{E}Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}-t_j) = T\,.$$

[7] Može se dokazati i jača tvrdnja $\sum_{j=0}^{2^n} (B_{\frac{tj}{2^n}} - B_{\frac{t(j-1)}{2^n}})^2 \xrightarrow{(g.s.)} T,\ n\to\infty$.

Nadalje,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2\right]\\
&= \mathbf{E}\left[\left((B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2-(t_{j+1}-t_j)\right)^2\right]\\
&= \mathbf{E}\left[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^4\right]-2(t_{j+1}-t_j)\mathbf{E}\left[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2\right]+(t_{j+1}-t_j)^2\\
&= 3(t_{j+1}-t_j)^2-2(t_{j+1}-t_j)^2+(t_{j+1}-t_j)^2\\
&= 2(t_{j+1}-t_j)^2
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Q_\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{Var}\left[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2\right]=\sum_{j=0}^{n-1}2(t_{j+1}-t_j)^2\\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1}2||\Pi||(t_{j+1}-t_j)=2||\Pi||\,T\,.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\lim_{||\Pi||\to 0}\mathrm{Var}(Q_\Pi)=0$. Sada tvrdnja (1.11) slijedi iz

$$\mathrm{Var}(Q_\Pi)=\mathbf{E}[Q_\Pi-\mathbf{E}Q_\Pi]^2=\mathbf{E}[Q_\Pi-T]^2.$$

□

Napomena 1.13. Iz gornjeg dokaza se vidi da je

$$\mathbf{E}[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2]=t_{j+1}-t_j$$

i

$$\mathrm{Var}[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2]=2(t_{j+1}-t_j)^2\,.$$

Kada je $t_{j+1}-t_j$ malo, $(t_{j+1}-t_j)^2$ je *vrlo malo*, pa bismo mogli rezonirati da je $(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2$, iako slučajno, s velikom vjerojatnošću blizu svoje sredine $t_{j+1}-t_j$. To bismo mogli zapisati kao

$$(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2\approx t_{j+1}-t_j\,.$$

ili možda malo preciznije

$$\frac{(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2}{t_{j+1}-t_j}\approx 1\,.$$

Međutim, gornji izraz ne može biti približno jednak 1, budući da je

$$Y_{j+1}:=\frac{B_{t_{j+1}}-B_{t_j}}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}$$

jedinična normalna slučajna varijabla (bez obzira koliko blizu bili t_j i t_{j+1}).
Uzmimo zbog jednostavnosti, $t_j=jT/n$. Tada je

$$(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2=T\cdot\frac{Y_{j+1}^2}{n}\,.$$

Slučajne varijable $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ su nezavisne i jednako distribuirane, pa po zakonu velikih brojeva slijedi da $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Y_{j+1}^2}{n}$ konvergira prema očekivanju $\mathbf{E}Y_{j+1}^2$ kada $n\to\infty$. To očekivanje je jednako 1, pa zaključujemo da $\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2$ konvergira prema T. Dakle, iako članovi $(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2$ te sume mogu biti vrlo različiti od svog očekivanja T/n, sumiranjem puno takvih članova razlike se usrednje i u limesu dobivamo T.

Od sada nadalje ćemo neformalno rezultat Teorema 1.12 pisati kao

$$dB_t \, dB_t = dt \, . \tag{1.14}$$

Budući da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[0, T_1]$ jednaka T_1, a na intervalu $[0, T_2]$, $T_1 < T_2$, jednaka T_2, slijedi da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[T_1, T_2]$ jednaka $T_2 - T_1$. Brownovo gibanje akumulira $T_2 - T_1$ jedinica kvadratne varijacije na intervalu $[T_1, T_2]$. Budući da to vrijedi za svaki vremenski interval, možemo zaključiti:

Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju po stopi jedan po jedinici vremena.

To pišemo neformalno kao (1.14) gdje na desnoj strani pretpostavljamo da piše 1 ispred dt. Iz diskretne teorije martingala znamo da je kvadrat martingala submartingal (Jensenova nejednakost). Sljedeći teorem, kojeg prezentiramo bez dokaza, pokazuje važnost procesa kvadratne varijacije i predstavlja specijalni slučaj Doob-Meyerove dekompozicije martingala.

Teorem 1.14. *Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ neprekidni, kvadratno integrabilni martingal. Tada je M konačne kvadratne varijacije i proces $\langle M \rangle$ je jedinstveni neprekidni, rastući, adaptirani slučajni proces takav da je slučajni proces $M^2 - \langle M \rangle$ martingal.*

Definicija 1.15. Neka su $X = (X_t : t \geq 0)$ i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni procesi. Kažemo da su X i Y procesi konačne kvadratne kovarijacije ako postoji slučajni proces $\langle X, Y \rangle = (\langle X, Y \rangle_t : t \geq 0)$ t.d.

$$(\mathbf{P}) \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) = \langle X, Y \rangle_t .$$

Slučajni proces $\langle X, Y \rangle$ zovemo **kvadratna kovarijacija** od X i Y.

Napomena 1.16. (a) Ako je proces $X = (X_t : t \geq 0)$ konačne kvadratne varijacije tada je $\langle X, X \rangle = \langle X \rangle$.

(b) Kvadratna kovarijacija je simetrična, tj. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$.

(c) Ako su $X = (X_t : t \geq 0)$ i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni procesi konačne kvadratne kovarijacije, onda su procesi $X + Y$ i $X - Y$ konačne kvadratne varijacije i vrijedi[8]

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} \left(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t \right) .$$

(d) Za slučajne procese $X = (X_t : t \geq 0)$, $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $Z = (Z_t : t \geq 0)$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ iz definicije kvadratne kovarijacije direktno slijedi

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle_t = \alpha \langle X, Z \rangle_t + \beta \langle Y, Z \rangle_t$$

Specijalno, $\langle \alpha X \rangle_t = \alpha^2 \langle X \rangle_t$.

[8]Provjerite tvrdnju samostalno.

(e) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ neprekidan slučajni proces i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni proces konačne varijacije. Tada je $\langle X, Y\rangle_t = 0$. Uistinu,

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle_t &\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=1}^{n} |X_{t_j} - X_{t_{j-1}}||Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \\ &\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{1\leq i\leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \sum_{j=1}^{n} |Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \\ &\leq V_t(Y) \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{1\leq i\leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 0,\end{aligned}$$

pri čemu gornji maksimum teži u 0 kada $||\Pi|| \to 0$ jer su trajektorije od X neprekidne g.s.

Iz Napomene 1.16(e) slijedi da je kvadratna kovarijacija funkcije $f(t) = t$ i Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ jednaka $\langle B, f\rangle_t = 0$. Analogno, slijedi da je kvadratna varijacija od f također nula. U skladu sa zapisom (1.14), ove dvije činjenice pišemo neformalno kao

$$dB_t\, dt = 0, \quad dt\, dt = 0\,.$$

Primjer 1.17. Neka su $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$ konstante. **Geometrijsko Brownovo gibanje** je slučajni proces $S = (S_t : t \geq 0)$ definiran s

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right\}.$$

Geometrijsko Brownovo gibanje služi kao model kretanja cijena dionica u Black-Scholes-Mertonovom modelu. Parametar σ ima interpretaciju *volatilnosti* i predstavlja mjeru varijacije cijene dionice na financijskom tržištu. Volatilnost je povezana s log-povratima dionice na sljedeći način. Neka su dani vremenski trenuci $0 \leq T_1 < T_2$, te pretpostavimo da opažamo geometrijsko Brownovo gibanje ("cijenu dionice") S_t za $T_1 \leq t \leq T_2$. Odaberimo particiju $\Pi = \{T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T_2\}$ tog intervala. Promotrimo log-povrate

$$\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} = \sigma(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{j+1} - t_j)$$

na svakom podintervalu $[t_j, t_{j+1}]$. Suma kvadrata log-povrata, koja se ponekad zove realizirana volatilnost, je

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right)^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\quad + 2\sigma \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(t_{j+1} - t_j)\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Pustimo $||\Pi|| \to 0$. Prvi član u gornjoj sumi konvergira prema $\langle B\rangle_{T_2} - \langle B\rangle_{T_1} = T_2 - T_1$, dok druga dva člana konvergiraju prema nuli. Zato je limes realizirane volatilnosti jednak $\sigma^2(T_2 - T_1)$. To znači da volatilnost možemo procijeniti pomoću formule

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right)^2.$$

1.4. **Markovljevo svojstvo.** U ovom odjeljku pokazat ćemo da Brownovo gibanje ima Markovljevo svojstvo. Kao prvi korak trebamo precizno definirati Markovljevo svojstvo za procese s neprekidnim vremenskim parametrom. Ta definicija treba formalizirati intuitivno razumijevanje Markovljevog procesa kao onog čije ponašanje u budućnosti ovisi o prošlosti samo kroz sadašnje stanje.

Definicija 1.18. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija. Adaptiran slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ je **Markovljev proces**, ako za sve $0 \leq s \leq t$ i za sve Borel-izmjerive funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ postoji Borel-izmjeriva funkcija $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je

$$\mathbf{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(X_s) \quad g.s. \tag{1.16}$$

Riječima, uvjetno na informaciju poznatu u trenutku s, svaka funkcija pozicije procesa X u trenutku $t \geq s$ je funkcija pozicije procesa X u trenutku s.
Za dokaz Markovljevog svojstva Brownovog gibanja trebat će nam sljedeća lema koju navodimo bez dokaza.

Lema 1.19. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da je slučajna varijabla X $\mathcal{G}$-izmjeriva, te da je slučajna varijabla Y nezavisna od $\mathcal{G}$. Neka je $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ Borelova funkcija i definirajmo*

$$g(x) = \mathbf{E}[h(x, Y)]\,.$$

Tada je

$$\mathbf{E}[h(X, Y) \,|\, \mathcal{G}] = g(X) \quad g.s.$$

Teorem 1.20. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je B Markovljev proces.*

Dokaz. Neka je $0 \leq s \leq t$, te neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Borelova funkcija. Trebamo pokazati da postoji Borelova funkcija $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(B_s) \quad g.s.$$

Vrijedi

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[f(B_s + (B_t - B_s)) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[h(B_s, B_t - B_s) \,|\, \mathcal{F}_s]\,,$$

gdje je $h(x, y) = f(x + y)$. Uočimo da je B_s $\mathcal{F}_s$-izmjeriva, a $B_t - B_s$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$. Po Lemi 1.19 imamo

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(B_s) \quad g.s.,$$

gdje je

$$g(x) = \mathbf{E}[h(x, B_t - B_s)] = \mathbf{E}[f(x + (B_t - B_s))]\,.$$

To dokazuje Markovljevo svojstvo. Štoviše, g možemo točno izračunati. Zaista , $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ otkud slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w + x) e^{-\frac{w^2}{2(t-s)}}\, dw\,. \tag{1.17}$$

□

Napomena 1.21. (i) Prethodnim teoremom smo u stvari pohazali da je Brownovo gibanje **vremenski homogen** Markovljev proces, odnosno da je za svaki $a > 0$ proces $(B_{t+a} - B_a : t \geq 0)$ Brownovo gibanje nezavisno s $\mathcal{F}_a$.

(ii) Zamjenom varijabli $\tau = t - s$ i $y = w + x$ u formuli (1.17) dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}\, dy\,.$$

Definirajmo **prijelaznu gustoću** $p(\tau, x, y)$ Brownovog gibanja formulom

$$p(\tau, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}\,.$$

Tada (1.17) možemo napisati kao

$$g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y) p(\tau, x, y)\, dy\,,$$

i konačno

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = \int_{-\infty}^\infty f(y) p(\tau, B_s, y)\, dy\,.$$

1.5. **Distribucija vremena prvog prijelaza.** Neka je $x \in \mathbf{R}$. Definirajmo **vrijeme prvog prijelaza** nivoa x sa

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 \,:\, B_t = x\}\,.$$

U ovom odjeljku izračunat ćemo distribuciju tog slučajnog vremena. Vrijeme prvog prijelaza je vrijeme zaustavljanja u smislu da za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{\tau_x \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, gdje je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za Brownovo gibanje. U tom računu trebat će nam teorem o opcionalnom zaustavljanju koji navodimo bez dokaza.

Teorem 1.22. *(Teorem o opcionalnom zaustavljanju) Neka je $M = (M_t \,:\, t \geq 0)$ martingal, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $M^\tau = (M_{t\wedge\tau} \,:\, t \geq 0)$ opet martingal.*

Primjer 1.23. Neka je $-a < 0 < b$. Definiramo s $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (-a, b)\}$ prvo vrijeme izlaska Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ iz intervala $(-a, b)$. Pokaže se (vidi npr. (1.24)) da je $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$.

(i) Odredimo razdiobu slučajne varijable B_τ. Slučajna varijabla τ je uistinu vrijeme zaustavljanja (obzirom na Brownovsku filtraciju).[9] Stoga je po Teoremu 1.22 zaustavljeni proces B^τ martingal. Slijedi da je

$$\mathbf{E}[B_\tau] \overset{\text{TDK}}{=} \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[B_t^\tau] = \mathbf{E}[B_0^\tau] = \mathbf{E}[B_0] = 0. \tag{1.18}$$

Uočimo da smo u prvoj jednakosti mogli koristiti teorem o dominiranoj konvergenciji jer je po definiciji od τ, $|B_t^\tau| \leq \max\{a, b\}$ g.s.. S druge strane, zbog neprekidnosti trajektorija g.s. Brownovog gibanja slijedi da je $B_\tau \in \{-a, b\}$ g.s. Stoga vrijedi da je

$$\begin{aligned} -a\mathbf{P}(B_\tau = -a) + b\mathbf{P}(B_\tau = b) = 0 \\ \mathbf{P}(B_\tau = -a) + \mathbf{P}(B_\tau = b) = 1, \end{aligned}$$

[9] Tvrdnju provjerite sami.

odnosno

$$\mathbf{P}(B_\tau = -a) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbf{P}(B_\tau = b) = \frac{a}{a+b}.$$

(ii) Odredimo sada $\mathbf{E}[\tau]$. Po rezultatu Teoremu 1.14 znamo da je proces $W = (W_t : t \geq 0)$ definiran s $W_t = B_t^2 - t$ martingal[10], pa je po Teoremu 1.22 i proces W^τ martingal. Sličnim računom kao u (1.18)[11] slijedi da je $\mathbf{E}[W_\tau] = 0$. Stoga je

$$\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{E}[B_\tau^2] \stackrel{(i)}{=} a^2 \frac{b}{a+b} + b^2 \frac{a}{a+b} = ab.$$

Neka je $\sigma > 0$. Promotrimo sljedeći slučajni proces koji će biti od fundamentalnog značenja:

$$Z_t = \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}. \tag{1.19}$$

Sljedeći rezultat je posljedica Zadatka 6 iz 2. domaće zadaće.

Teorem 1.24. *(Eksponencijalni martingal) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje s filtracijom $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, te neka je $\sigma > 0$. Slučajni proces Z definiran s (1.19) je martingal.*

Zaustavimo eksponencijalni martingal Z u vremenu prvog prijelaza τ_x. Zaustavljen proces je po teoremu o opcionalnom zaustavljanju opet martingal pa vrijedi

$$1 = Z_0 = \mathbf{E}[Z_{t\wedge\tau_x}] = \mathbf{E}\left[\exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\}\right]. \tag{1.20}$$

Pretpostavimo da je $x > 0$. Iz neprekidnosti trajektorija Brovnog gibanja slijedi da se do trenutka τ_x Brownovo gibanje nalazi ispod razine x, odnosno, $B_{t\wedge\tau_x} \leq x$. Zato je

$$0 \leq \exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} \leq e^{\sigma x}. \tag{1.21}$$

Ako je $\tau_x < \infty$, tada je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\}.$$

S druge strane, ako je $\tau_x = \infty$, tada je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\} = \lim_{t\to\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t\} = 0.$$

To možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}.$$

Nadalje, ako je $\tau_x < \infty$, tada je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} = \exp\{\sigma B_{\tau_x}\} = \exp\{\sigma x\}.$$

Ako je $\tau_x = \infty$, tada iz (1.21) slijedi da je za sve $t \geq 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} \leq e^{\sigma x} \limsup_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 0.$$

Zato je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}. \tag{1.22}$$

[10]Za vježbu dokažite ovaj rezultat direktno po definicji martingala.
[11]Račun provjerite sami.

Sada možemo pustiti $t \to \infty$ u formuli (1.20), te po teoremu o dominiranoj konvergenciji i (1.22) dobivamo

$$1 = \mathbf{E}\left[1_{\{\tau_x < \infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 \tau_x\right\}\right],$$

odnosno ekvivalentno,

$$\mathbf{E}\left[1_{\{\tau_x < \infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 \tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}. \tag{1.23}$$

Gornja jednakost vrijedi za sve $\sigma > 0$. Pustimo $\sigma \to 0$. Upotrebom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $\mathbf{E}[1_{\{\tau_x < \infty\}}] = 1$, odnosno

$$\mathbf{P}(\tau_x < \infty) = 1. \tag{1.24}$$

Sada kada znamo da je τ_x konačan gotovo sigurno, možemo taj uvijet maknuti iz formule (1.23) i dobiti

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 \tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}. \tag{1.25}$$

Iz (1.25) možemo lagano dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.25. *Neka je $x \in \mathbf{R}$. Tada je prvo vrijeme prijelaza nivoa x konačno gotovo sigurno. Nadalje, Laplaceova transformacija distribucije od τ_x je*

$$\mathbf{E}e^{-\alpha \tau_x} = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0. \tag{1.26}$$

Dokaz. Promatrajmo prvo slučaj $x > 0$. Stavimo li $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ u (1.25), dobivamo formulu (1.26). Za $x < 0$, formula slijedi iz simetrije Brownovog gibanja. $\square$

Deriviramo li formulu (1.26) po α dobivamo

$$\mathbf{E}[\tau_x e^{-\alpha \tau_x}] = \frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}} e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Pustimo li $\alpha \downarrow 0$ slijedi $\mathbf{E}[\tau_x] = \infty$, $x \neq 0$.

Neka F označava funkciju distribucije od τ_x. Uočite da je $F(t) = 0$ za $t \leq 0$. Formula (1.26) može se zapisati kao

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dF(t) = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Direktnim računanjem može se pokazati da vrijedi sljedeća formula:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dt = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Uspoređivanjem posljednje dvije formule slijedi da je funkcija distribucije F apsolutno neprekidna s funkcijom gustoće

$$f_{\tau_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Kažemo da τ_x ima Lévyjevu razdiobu. Dodatno vrijedi $\mathbf{E}[\tau_x] = +\infty$.[12]

[12]Provjerite tvrdnju sami.

2. Itôv integral

Neka je $T > 0$, $H = (H_t : t \in [0, T])$ odgovarajući adaptirani slučajni proces i $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje na istom vjerojatnosnom prostoru s filtracijom. Cilj ovog poglavlja je definirati Itôv integral

$$\int_0^T H_t \, dB_t$$

i pokazati njegova svojstva. Uočimo da gornji integral ne možemo definirati po trajektorijama Brownovog gibanja (kao Lebesgue-Stieltjesov integral) jer je Brownovo gibanje neomeđene varijacije. Dodatno, diferencijalni račun koji se koristi za računanje s takvim integralima razlikuje se od uobičajenog diferencijalnog računa. Ovdje se diferencijalni račun temelji se Itôvoj formuli, koja u obzir uzima ne-nul kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja.
U financijama se Itôv integral koristi za modeliranje vrijednosti portfelja. Nakon što razvijemo Itôv račun, primjenit ćemo ga na izvod Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe za cijenu opcije. Također, u primjenama u financijama H_t će imati interpretaciju pozicije u financijskoj imovini u trenutku t, koja u principu ovisi o informaciji dostupnoj do trenutka t. Odavde slijedi zahtjev na adaptiranost slučajnog procesa H. S druge strane, budući prirasti Brownovog gibanja nezavisni su od $\mathcal{F}_t$. To znači da je naša pozicija u trenutku t nezavisna od buduće nesigurnosti na tržištu generirane Brownovim gibanjem B.

2.1. **Itôv integral za jednostavne integrande.** Fiksirajmo pozitivno vrijeme $T > 0$. Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje zajedno s Brownovskom filtracijom $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Neka je $H = (H_t : t \in [0, T])$ adaptiran slučajni proces obzirom na $\mathbf{F}$. Prvi korak u definiciji Itôvog integrala sastoji se u tome da se integriraju jednostavni procesi.

Definicija 2.1. Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ zove se **jednostavan proces** ako je

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \, 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{2.1}$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$, i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva. S $\mathcal{E}_T$ označimo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na $[0, T]$.

Riječima, adaptiran slučajni proces H je jednostavan, ako postoji particija Π takva da je H konstantan na svakom intervalu particije $[t_j, t_{j+1})$. Kada kažemo konstantan mislimo da je jednak jednoj slučajnoj varijabli koja se ne mijenja kroz taj interval. Omeđenost slučajnih varijabli ϕ_j znači da postoji $M \in \mathbf{R}$ tako da je $|\phi_j| \leq M$ za sve j (i g.s. sve $\omega \in \Omega$).

Definicija 2.2. Za slučajni proces $H \in \mathcal{E}_T$ definiran s (2.1) definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0, T])$ s

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).^{13} \tag{2.2}$$

[13] $a \wedge b = \min\{a, b\}$

Proces I zovemo **Itôv integral** jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t H_s \, dB_s = (H \cdot B)_t \, .$$

Napomena 2.3. (a) Uočimo da je za $t \in [t_{k-1}, t_k\rangle$,

$$\int_0^t H_s \, dB_s = \sum_{j=0}^{k-2} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_{k-1}(B_t - B_{t_{k-1}})$$

(b) Iz definicije procesa I lako se vidi da je on $\mathbf{F}$-adaptiran. Također, uočimo da je preslikavanje $H \mapsto (H \cdot B)$ na $\mathcal{E}_T$ linearno.

(c) Razmišljajmo o vrijednosti Brownovog gibanja B_t kao o jediničnoj cijeni financijske imovine (npr. jedne dionice) u trenutku t. Budući da B_t može biti manje od nule, takav model je loš, ali to ćemo u ovom trenutku zanemariti. O vremenima $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ mislimo kao o trenucima trgovanja u toj imovini, a o $\phi_{t_0}, \phi_{t_1}, \ldots, \phi_{t_{n-1}}$ kao o pozicijama u imovini (broj dionica) unutar intervala oblika $[t_j, t_{j+1})$. Uočimo da je tada dobitak od takvog trgovanja u svakom trenutku t dan s I_t. Na proces I stoga možemo gledati na analogon procesa dobitka $G_t(\phi)$ u diskretnom modelu financijskog tržišta.

Prvo važno svojstvo slučajnog procesa I je da od Brownovog gibanja B nasljeđuje svojstvo martingalnosti.

Teorem 2.4. *Itôv integral $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom (2.2) je martingal.*

Dokaz. U Napomeni 2.3 već smo spomenuli kako je proces I $\mathbf{F}$-adaptiran. Također, iz omeđenosti slučajnih varijabli ϕ_j ($|\phi_j| \le M$ za sve j) slijedi da je za svaki $t \in [0,T]$,

$$\mathbf{E}[|I_t|] \le M \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}[|B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}|] = M\sqrt{\frac{2}{\pi} t} < \infty.$$

Neka su sada $0 \le s < t \le T$. Pretpostavimo da se s i t nalaze u različitim intervalima particije Π. Slučaj kada su ta vremena u istom intervalu particije dokazuje se slično.[14] Dakle, neka je $s \in [t_l, t_{l+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ za $l < k$. Jednakost (2.2) možemo napisati kao

$$\begin{aligned} I_t = & \sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_l (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \\ & + \sum_{j=l+1}^{k-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_k (B_t - B_{t_k}) \, . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Računamo uvjetno očekivanje svakog od četiri člana u formuli (2.3), uvjetno na σ-algebru $\mathcal{F}_s$. Budući da su sve slučajne varijable u prvom članu $\mathcal{F}_s$-izmjerive, vrijedi

$$\mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s \right] = \sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \, . \tag{2.4}$$

Za drugi član imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\phi_l (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \,|\, \mathcal{F}_s] &= \phi_l \mathbf{E}[B_{t_{l+1}} - B_{t_l} \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &= \phi_l (B_s - B_{t_l}) \, . \end{aligned} \tag{2.5}$$

[14] Dokažite sami za vježbu.

Zbrajanjem (2.4) i (2.5) dobivamo I_s. Dakle, preostaje pokazati da su uvjetna očekivanja trećeg i četvrtog člana jednaka nuli. Da bismo to pokazali računamo za $j = l+1, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&\quad = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_{t_j}] \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&\quad = \mathbf{E}[\phi_j(\mathbf{E}[B_{t_{j+1}} \,|\, \mathcal{F}_{t_j}] - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&\quad = \mathbf{E}[\phi_j(B_{t_j} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] = 0\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem retku koristili svojstvo martingalnosti Brownovog gibanja. Zbog linearnosti uvjetnog očekivanja slijedi

$$\mathbf{E}\left[\sum_{j=l+1}^{k-1} \phi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s\right] = 0\,.$$

Na isti način se pokaže i da je uvjetno očekivanje četvrtog člana jednako nuli. □

Budući da je $I_0 = 0$, slijedi da je $\mathbf{E}I_t = \mathbf{E}I_0 = 0$ za sve $0 \le t \le T$. Specijalno, $\mathrm{Var}I_t = \mathbf{E}I_t^2$. Očekivanje kvadrata Itôvog integrala izračunato je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.5. *(Itôva izometrija) Itôv integral definiran s (2.2) zadovoljava*

$$\mathbf{E}I_t^2 = \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\,du\,. \tag{2.6}$$

Dokaz. Fiksiramo vrijeme $t > 0$. Uvedimo zbog jednostavnosti sljedeće oznake: $\Delta B_j = B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t}$ i $\Delta t_j = t_{j+1}\wedge t - t_j \wedge t$. Neka je $t \in [t_k, t_{k+1}\rangle$. Tada je $I_t = \sum_{j=0}^k \phi_j \Delta B_j$, te vrijedi

$$I_t^2 = \sum_{j=0}^k \phi_j^2 \Delta B_j^2 + 2\sum_{0\le i<j\le k} \phi_i\phi_j \Delta B_i \Delta B_j\,.$$

Prvo pokazujemo da je očekivanje članova u drugoj sumi jednako nula. Za $i < j$ je $\phi_i\phi_j\Delta B_i$ $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerivo, dok je prirast ΔB_j nezavisan od $\mathcal{F}_{t_j}$ i $\mathbf{E}\Delta B_j = 0$. Zato je

$$\mathbf{E}[\phi_i\phi_j\Delta B_i\Delta B_j] = \mathbf{E}[\phi_i\phi_j\Delta B_i]\mathbf{E}\Delta B_j = 0\,.$$

Pogledajmo sada član oblika $\phi_j^2\Delta B_j^2$. Slučajna varijabla ϕ_j^2 je $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva, dok je kvadrat prirasta ΔB_j^2 nezavisan od $\mathcal{F}_{t_j}$, te $\mathbf{E}\Delta B_j^2 = \mathbf{E}(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t})^2 = \Delta t_j$ za $j = 0, 1, \dots, k$. Zato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}I_t^2 &= \sum_{j=0}^k \mathbf{E}[\phi_j^2\Delta B_j^2] = \sum_{j=0}^k \mathbf{E}[\phi_j^2]\mathbf{E}[\Delta B_j^2] \\
&= \sum_{j=0}^k \mathbf{E}\phi_j^2\Delta t_j\,. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Uočite da je H_u konstantna na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ i jednaka ϕ_j. Preciznije, $H_u(\omega) = \phi_j(\omega)$ za sve $u \in [t_j, t_{j+1}\rangle$, za g.s. sve $\omega \in \Omega$. Zato je

$$\phi_j^2\Delta t_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2\,du\,, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Uvrstimo li u (2.7) dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}I_t^2 &= \sum_{j=0}^{k} \mathbf{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2\, du = \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2\, du\right] \\ &= \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\, du\,.\end{aligned}$$

□

Napomena 2.6. Prethodnim teoremom pokazali smo da postoji izometrija između normiranih prostora $\mathcal{E}_T$ s produktom $\langle H,K\rangle = \mathbf{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right]$ i $L^2(\Omega)$ s produktom $\langle X,Y\rangle = \mathbf{E}\,[XY]$.

Proučimo na kraju kvadratnu varijaciju Itôvog integrala I.

Teorem 2.7. *Kvadratna varijacija do trenutka t Itôvog integrala I definiranog formulom* (2.2) *jednaka je*

$$\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\, du\,. \tag{2.8}$$

Dokaz. Izračunajmo prvo kvadratnu varijaciju Itôvog integrala na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ na kojem je H_u konstantan. Odaberimo particiju

$$t_j = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t_{j+1}$$

i promotrimo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1}[I_{s_{i+1}} - I_{s_i}]^2 &= \sum_{i=0}^{m-1}[\phi_j(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})]^2 \\ &= \phi_j^2\sum_{i=0}^{m-1}(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})^2\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Kada $m\to\infty$ i korak $\max_{i=0,1,\ldots,m-1}(s_{i+1}-s_i)\to 0$, član $\sum_{i=0}^{m-1}(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})^2$ teži prema kvadratnoj varijaciji Brownovog gibanja na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$, t.j., prema $t_{j+1}-t_j$. Prema tome, limes od (2.9) jednak je

$$\phi_j^2(t_{j+1}-t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_u^2\, du\,.$$

Zbrajanjem svih odgovarajućih dijelova dobivamo formulu (2.8). □

Uočimo da se varijanca i kvadratna varijacija Itôvog integrala razlikuju. Po Teoremu 2.5, $\mathrm{Var}I_t = \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\, du$ (što je nenegativan realan broj), dok je po Teoremu 2.7, $\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\, du$ (što je slučajna varijabla). Ponovimo da se kvadratna varijacija računa po putu (trajektoriji), dok je varijanca usrednjenje po svim putovima.

Napomena 2.8. (o notaciji).

(a) Prisjetimo se neformalne oznake za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja $dB_t dB_t = dt$. Tu jednakost smo interpretirali kao tvrdnju da Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju brzinom jedan po jedinici vremena. Na sličan način, stohastički integral $I_t = \int_0^t H_u\, dB_u$ neformalno zapisujemo u obliku $dI_t = H_t\, dB_t$. To vodi do sljedeće oznake za $\langle I\rangle_t$:

$$dI_t dI_t = H_t^2\, dB_t dB_t = H_t^2\, dt\,. \tag{2.10}$$

(b) Oznake

$$I_t = \int_0^t H_u\, dB_u \tag{2.11}$$

i

$$dI_t = H_t\, dB_t \tag{2.12}$$

imaju skoro isto značenje. Jednakost (2.11) ima precizno značenje dano definicijom (2.2). Jednakost (2.12) ima neprecizno značenje da kada se pomaknemo unaprijed u vremenu za "vrlo malo", promjena Itôvog integrala I je H_t puta promjena Brownovog gibanja u tom malom vremenskom pomaku. Ta jednakost ima i precizno značenje koje se dobije integriranjem obiju strana. U tom slučaju moramo paziti na konstantu integriranja I_0:

$$I_t = I_0 + \int_0^t H_u\, dB_u\,.$$

Kažemo da je (2.12) diferencijalni oblik od (2.11), dok je (2.11) integralni oblik od (2.12).

2.2. **Itôv integral za opće integrande.** U ovom odjeljku govorit ćemo o Itôvom integralu za opće integrande. Cilj je proširiti definiciju Itôvog integrala tako da definicija bude konzistentna i da se prenose svojstva Itôvog integrala za jednostavne integrande. Za prostor općih integranada uzimamo familiju $\mathbf{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : 0 \le t \le T)$ koji zadovoljavaju sljedeći tehnički uvjet:

$$\mathbf{E}\int_0^T H_t^2\, dt < \infty\,. \tag{2.13}$$

Ovu familiju procesa ćemo označavati s $\mathcal{L}^2_{\text{ad}}$. $\mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ je vektorski prostor sa skalarnim produktom

$$\langle H, K\rangle_{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} = \mathbf{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right], \quad H, K \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$$

i pripadnom normom $||H||^2_{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} = \langle H, H\rangle_{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}}$. Uočimo da je trivijalno $\mathcal{E}_T \subset \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$.
Glavna ideja za proširenje definicije Itôvog integrala je aproksimacija procesa $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \mathcal{E}_T$. Na primjer, pretpostavimo da $H = (H_t : 0 \le t \le T)$ ima neprekidne putove[15]. Odaberimo particiju $\Pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t\}$ intervala $[0, t]$ i definiramo jednostavan proces $H^{(n)}$ tako da stavimo $H_u^{(n)} = H_{t_j^{(n)}}$ za sve $u \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Za takav jednostavan integrand po formuli (2.2) znamo izračunati $\int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Sada Itôv integral procesa H obzirom na Brownovo gibanje $B = (B_t : t \in [0, T])$ možemo definirati kao limes integrala takvih jednostavnih integranada kada se profinjuje particija. Ključan korak za provedbu takvog programa je sljedeća lema, koju navodimo bez dokaza.

Lema 2.9. *Za slučajni proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ postoji niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} ||H^{(n)} - H||^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2\, dt = 0\,, \tag{2.14}$$

odnosno $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{ad}} H$, $n \to \infty$.

[15] $t \mapsto H_t(\omega)$ su neprekidne funkcije na $[0, T]$ za g.s. $\omega \in \Omega$

Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ niz aproksimirajućih jednostavnih integranada iz Leme 2.9, te označimo $I_t^{(n)} = \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Iz relacije (2.14) jednostavno slijedi da je niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$, odnosno da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt \le 2\left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2\, dt + \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(m)} - H_t|^2\, dt\right) = 0.$$

Međutim, zbog Itôve izometrije (Teorem 2.5 primijenjen na Iôv integral $((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B)$ koji je zbog linearnosti jednak procesu $I^{(n)} - I^{(m)}$) imamo da je

$$\mathbf{E}\int_0^t |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt = \mathbf{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2]\,,$$

pa je stoga

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = 0\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{2.15}$$

To znači da je niz Itôvih integrala $(I_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ u trenutku t Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ za sve $t \in [0,T]$. Kako je $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ potpun, slijedi da niz $(I_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira (u L^2)i njegov limes zovemo Itôvim integralom procesa H obzirom na Brownovo gibanje B (u trenutku t) i označavamo $(H\cdot B)_t = I_t = \int_0^t H_u\, dB_u$. Dakle,

$$\int_0^t H_u\, dB_u = (L^2) \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u\,. \tag{2.16}$$

Napomena 2.10. (i) Definicija Itôvog integrala za opće integrande je konzistentna, odnosno poopćuje Definiciju 2.2 i ne ovisi o odabiru aproksimirajućeg niza.[16]

(ii) Uočite da je $\int_0^t H_u\, dB_u$ samo oznaka za slučajnu varijablu $I_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tj. taj stohastički integral nije definiran po trajektorijama Brownovog gibanja.

(iii) Iz definicije direktno slijedi da je proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ $\mathbf{F}$-adaptiran.

Tako definiran integral nasljeđuje svojstva Itôvog integrala jednostavnih integranada. Sljedeći teorem navodi ta svojstva.

Teorem 2.11. *Neka je $T > 0$, te neka je $H = (H_t : t \in [0,T]) \in \mathcal{L}^2_{ad}$. Tada slučajan proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom (2.16) ima sljedeća svojstva:*

(a) (neprekidnost) *Funkcija $t \mapsto I_t$ je neprekidna na $[0,T]$ g.s.,*

(b) (linearnost) *Za $H, K \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $a, b \in \mathbf{R}$ vrijedi*

$$((aH + bK)\cdot B)_t = a(H\cdot B)_t + b(K\cdot B)_t,$$

*(c) (*Itôva izometrija*) $\mathbf{E}I_t^2 = \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\, du$,*

(d) (martingalnost) *Proces I je martingal obzirom na filtraciju $\mathbf{F}$.*

Prije nego krenemo s dokazom gornjeg teorema, dokazat ćemo pomoćnu propoziciju za (vremenski neprekidne) martingale.

Propozicija 2.12. *(Doobova L^p-nejednakost) Neka je $X = (X_t : t \in [0,T])$ zdesna neprekidni pozitivni submartingal i $p, q \ge 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je*

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^p\right] \le q^p \mathbf{E}[X_t^p],\ t \ge 0.$$

[16]Tvrdnju provjerite sami.

Specijalno, za zdesna neprekidni martingal X vrijedi

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^2\right] \le 4\mathbf{E}[X_t^2],\ t \ge 0.$$

Dokaz. Koristimo Doobovu nejednakost za vremenski diskretne martingale.[17] Neka je $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz t.d. $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,t]$. Tada zbog neprekidnosti zdesna submartingala X slijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^p\right] = \mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} X_s^p\right] = \mathbf{E}\left[\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right]$$
$$\overset{(\mathrm{TMK})}{=} \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right]. \tag{2.17}$$

Kako je proces $(X_{r_k} : k = 1,\dots,n)$ diskretni submartingal, iz diskretne Doobove L^p-nejednakosti slijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right] \le q^p\mathbf{E}\left[X_{r_n}^p\right]. \tag{2.18}$$

Tvrdnja sada slijedi iz (2.17), (2.18) i činjenice da je X^p submartingal (Jensenova nejednakost) pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $r_n \le t$ i $\mathbf{E}[X_{r_n}^p] \le \mathbf{E}[X_t^p]$. □

Dokaz Teorema 2.11:

(a) Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ aproksimirajući niz za H iz Leme 2.9. Kako je $I^{(n)} = (H^{(n)} \cdot B)$ neprekidni martingal, po Doobovoj L^p-nejednakosti i (2.15) slijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n)} - I_t^{(m)}|^2\right] \le 4\mathbf{E}[(I_T^{(n)} - I_T^{(m)})^2] \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Stoga, možemo odabrati podniz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}|^2\right] < 2^{-3k}.$$

Tada za događaje

$$A_k = \left\{\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| \ge 2^{-k}\right\},\ k \in \mathbf{N}$$

vrijedi da je nužno $\mathbf{P}(A_k) < 2^{-k}$. Kako je $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ po Borel-Cantellijevoj lemi slijedi da je $\mathbf{P}(\overline{\lim}_k A_k) = 0$. Prema tome niz $(I^{(n_k)}(\omega))_k$ je uniformno Cauchyjev u $C([0,T])$ za gotovo svaki $\omega \in \Omega$, odnosno

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{m\ge1}\bigcap_{k\ge m}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| < 2^{-k}\right\}\right) = 1.$$

Zbog potpunosti prostora $(C([0,T]), ||\cdot||_\infty)$ slijedi da je $(I^{(n_k)})_k$ g.s. konvergentan i limes je g.s. neprekidna funkcija. Kako niz $(I^{(n)})_n$ konvergira k I u L^2, tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti g.s. limesa.

[17] Vidi Teorem 1.87 u skripti Z.Vondraček: *Slučajni procesi*

(b) Slijedi direktno iz linearnosti Itôvog integrala za jednostavne integrande, vidi Napomenu 2.3 (b).

(c) Iz $I_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} I_t$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[(I_t^{(n)})^2] = \mathbf{E}[I_t^2]$. Iz Itôve izometrije za jednostavne integrande, Teorem 2.5, sada slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_0^t (H_u^{(n)})^2 du\right] = \mathbf{E}[I_t^2].$$

S druge strane $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} H$ pa je specijalno

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_0^t (H_u^{(n)})^2 du\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t H_u^2 du\right].$$

Tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti limesa.

(d) Proces I je adaptiran i po (c) dijelu vrijedi $\mathbf{E}[|I_t|] \leq \mathbf{E}[I_t^2]^{\frac{1}{2}} < \infty$. Ostaje pokazati da je $\mathbf{E}[I_t - I_s|\mathcal{F}_s] = 0$ za sve $0 \leq s < t$. Iz Jensenove nejednakosti i definicije Itôvog integrala slijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{E}\left[I_t - I_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\right]\right)^2\right] &\leq \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\left(I_t - I_t^{(n)}\right)^2|\mathcal{F}_s\right]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\left(I_t - I_t^{(n)}\right)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

pa postoji podniz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.d. je

$$\mathbf{E}\left[I_t - I_t^{(n_k)}|\mathcal{F}_s\right] \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{(g.s.)}.$$

Kako $I_s^{(n_k)} \xrightarrow{L^2} I_s$, postoji podniz (kojeg isto označavamo s $(n_k)_k$) t.d. $I_s^{(n_k)} \xrightarrow{g.s.} I_s$. Tvrdnja sada slijedi iz martingalnosti procesa $I^{(n)}$, te

$$\mathbf{E}\left[I_s - I_t|\mathcal{F}_s\right] = I_s - I_s^{(n_k)} + \mathbf{E}\left[I_s^{(n_k)} - I_t^{(n_k)}|\mathcal{F}_s\right] + \mathbf{E}\left[I_t^{(n_k)} - I_t|\mathcal{F}_s\right].$$

□

Napomena 2.13. Korištenjem Leme 2.9 može se također pokazati da je

$$\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\, du,\ t \in [0,T].$$

Uočite da za $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ nužno vrijedi da je $\int_0^t H_u^2\, du < \infty$ g.s.

2.3. **Računanje Itôvog integrala.** Sada ćemo korištenjem definicije Itôvog integrala izvesti formulu za računanje integrala $\int_0^T H_t\, dB_t$, gdje je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje i $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ slučajan proces neprekidan u srednjem reda 2.

Za početak neka je $0 \leq a < b \leq T$ i ξ $\mathcal{F}_a$-izmjeriva **omeđena** slučajna varijabla. Tada je slučajni proces $(\xi 1_{[a,b]}(t) : t \in [0,T])$ u klasi $\mathcal{E}_T$ pa po definiciji vrijedi da je

$$\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t = \xi(B_b - B_a).$$

Ova se jednakost sada može proširiti i na slučajne varijable $\xi \in L^2(\Omega)$.

Lema 2.14. *Neka je $0 \leq a < b \leq T$ i ξ $\mathcal{F}_a$-izmjeriva slučajna varijabla t.d. je $\mathbf{E}[\xi^2] < \infty$. Tada je slučajni proces $\xi 1_{[a,b]} \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i vrijedi*

$$\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t = \xi(B_b - B_a). \tag{2.19}$$

Dokaz. Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo $\xi_k = (-k) \vee \xi \wedge k$ odrezanu slučajnu varijablu. Tada je slučajni proces $\xi_k 1_{[a,b]} \in \mathcal{E}_T$ aproksimirajući niz za $\xi 1_{[a,b]}$[18], odnosno

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_0^T (\xi 1_{[a,b]}(t) - \xi_k 1_{[a,b]}(t))^2 dt\right] = 0.$$

Sada iz definicije Itôvog integrala i (2.19) slijedi da je

$$\begin{aligned}\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t &= (L^2) \lim_{k\to\infty} \int_0^T \xi_k 1_{[a,b]}(t) dB_t = (L^2) \lim_{k\to\infty} \xi_k (B_b - B_a)\\ &= \xi(B_b - B_a).\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.15. *Neka je $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ slučajan proces koji je neprekidan u srednjem reda 2, odnosno za koji vrijedi*

$$\lim_{s\to t} \mathbf{E}[(H_s - H_t)^2] = 0, \ \forall t \geq 0.$$

Tada je

$$\int_0^T H_s dB_s = (L^2) \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}),$$

za sve nizove particija $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ t.d. $||\Pi|| \to 0$.

Dokaz. Za danu subdiviziju Π definiramo diskretizaciju H^Π procesa H s

$$H_t^\Pi = \sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}} 1_{[t_{j-1},t_j)}(t).$$

Po Lemi (2.14) znamo da je $H^\Pi \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$. Štoviše, $H^\Pi \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}} H$. Naime, po Itôvoj izometriji, Teorem 2.11(c) i Fubinijevom teoremu, slijedi

$$\begin{aligned}||\int_0^T H_s dB_s - \int_0^T H_s^\Pi dB_s||^2_{L^2} &= \mathbf{E}\left[\left|\int_0^T (H_s - H_s^\Pi) dB_s\right|^2\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\int_0^T (H_s - H_s^\Pi)^2 ds\right]\\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{E}\left[(H_s - H_{t_{j-1}})^2\right] ds\\ &\leq \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \sup_{u,v\in[t_{j-1},t_j]} \mathbf{E}\left[(H_u - H_v)^2\right].\end{aligned} \tag{2.20}$$

Kako je $t \mapsto H_t$ neprekidno preslikavanje u srednjem reda 2, to je uniformno neprekidno u srednjem reda dva na intervalu $[0,T]$. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. za sve

[18]Raspišite detalje sami.

$u, v \in [0,T]$, $|u-v| < \delta$, vrijedi $\mathbf{E}[(H_u - H_v)^2] < \varepsilon$. Prema tome, iz (2.20) slijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\left|\int_0^T (H_s - H_s^\Pi) dB_s\right|^2\right] \le \varepsilon \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \varepsilon T,$$

za sve particije Π za koje je $||\Pi|| < \delta$. Tvrdnja sada slijedi iz Leme 2.14, jer je

$$\int_0^T H_s dB_s = (L^2) \lim_{||\Pi|| \to 0} \int_0^T H_s^\Pi dB_s = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

$\square$

Napomena 2.16. Lako se pokaže da je proces $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ neprekidan u srednjem reda 2 ako je preslikavanje

$$(s,t) \mapsto \mathbf{E}[H_s H_t]$$

neprekidno.[19]

Sada ćemo iskoristiti Propoziciju 2.15 da izračunamo integral

$$\int_0^T B_t dB_t.$$

Uočimo da gornji integral ima smisla obzirom da je $B \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$. Štoviše, B je neprekidno preslikavanje u srednjem reda 2.[20] Za prirodan broj $n \in \mathbf{N}$, definirajmo ekvidistantnu particiju Π^n s korakom $\frac{T}{n}$, za koju je $t_i^{(n)} = \frac{iT}{n}$, $i = 0, ..., n$. Uz oznaku $\widetilde{B}_j = B_{t_j^{(n)}}$, iz Propozicije 2.15 slijedi da je

$$\int_0^T B_t \, dB_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j (\widetilde{B}_{j+1} - \widetilde{B}_j) \,. \tag{2.21}$$

Sljedeći račun će nam trebati za određivanje gornjeg limesa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\widetilde{B}_{j+1} - \widetilde{B}_j)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_{j+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j \widetilde{B}_{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{B}_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j \widetilde{B}_{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{B}_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j \widetilde{B}_{j+1} \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{B}_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{B}_j (\widetilde{B}_j - \widetilde{B}_{j+1}) \,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Uvrstimo u (2.21) i dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^T B_t \, dB_t &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[B_{\frac{(j+1)T}{n}} - B_{\frac{jT}{n}} \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \langle B \rangle_T = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

[19] Tvrdnju provjerite sami.
[20] Tvrdnju provjerite sami.

Uočimo razliku u odnosu na obični diferencijalni račun. Ako je g diferencijabilna funkcija s $g(0)=0$, tada imamo

$$\int_0^T g(t)\,dg(t) = \int_0^T g(t)g'(t)\,dt = \frac{1}{2}g^2(T)\,.$$

Kod Itôvog integrala pojavljuje se dodatni član $\frac{1}{2}T$ kao posljedica ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja.

Kao posljedicu formule (2.23) dobivamo da je proces $B_t^2 - t$ martingal. Zaista, taj slučajni proces je dva puta Itôv integral $\int_0^t B_u\,dB_u$. Međutim, Itôv integral je martingal po Teoremu 2.11 (d).

2.4. **Itôva formula.** U običnom diferencijalnom računu vrijedi sljedeće pravilo za derivaciju kompozicije funkcija f i g:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)\,,$$

što možemo pisati u obliku

$$df(g(t)) = f'(g(t))g'(t)\,dt = f'(g(t))dg(t)\,.$$

Glavno pitanje u ovom poglavlju na koje ćemo dati odgovor je kako izgleda odgovarajuće pravilo za kompoziciju $f(B_t)$ funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i Brownovog gibanja $B=(B_t : t\ge 0)$. Probajmo naslutiti odgovor na ovo pitanje iz sljedećeg primjera.

Primjer 2.17. Neka je $f(x)=x^2$. Jednakost (2.23) daje da za sve $T>0$ vrijedi:

$$B_T^2 = 2\int_0^T B_t dB_t + T,$$

odnosno[21]

$$f(B_T) - f(B_0) = \int_0^T f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(B_t)dt. \tag{2.24}$$

Gornju formulu možemo zapisati i u diferencijalnom obliku,

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)d\langle B\rangle_t.$$

Iz gornjeg primjera jasno je da općenito ne vrijedi pravilo $df(B_t) = f'(B_t)\,dB_t$. Promatrajući formulu (2.24) naslućujemo da je to zbog ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja. Štoviše, pokazat ćemo da za točnu formulu uistinu trebamo pretpostaviti postojanje druge derivacije funkcije f.

Formula (2.24) naziva se Itôva formula za Brownovo gibanje (u integralnom obliku). Napomenimo da je integralni oblik formule (2.24) matematički smislen, jer je dobro definiran[22] Itôv integral $\int_0^T f'(B_t)\,dB_t$ koji se u njoj pojavljuje, a integral $\int_0^T f''(B_t)\,dt$ shvaćamo kao običan (Lebesgueov ili Riemannov) integral. S druge strane, pripadni diferencijalni oblik često je pogodniji za računanje.

[21] Uočite da koristimo da je $B_0=0$.

[22] Naš pristup ovdje je malo neprecizan. Naime, uočimo da općenito proces $(f'(B_t) : t\ge 0)$ nije nužno u $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ pa $\int_0^T f'(B_t)\,dB_t$ nije nužno Itôv integral u smislu definicije iz Poglavlja 2.2. No definicija Itôvog integrala se može proširiti na širu klasu integranada od $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ (tzv. *lokalno ograničeni* adaptirani procesi) koja obuhvaća neprekidne adaptirane slučajne procese. U tom kontekstu je Itôv integral $(f'(B_t) : t\ge 0)$ dobro definiran za funkcije $f\in C^1$. Mi ćemo u sklopu ovog kolegija zanemariti ovu nepreciznost.

Još jedna posljedica Primjera 2.17 je da funkcija Itôvog integrala ne mora nužno biti Itôv integral. Neka je $I = (I_t : t \geq 0)$ Itôv integral procesa $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ obzirom na Brownovo gibanje B i f neka funkcija. Tada slučajni proces $f(I) = (f(I_t) : t \geq 0)$ ne mora biti i sam Itôv integral nekog procesa obzirom na Brownovo gibanje. Naime, uzimanjem $H_t = 1$ i $f(x) = x^2$ kao u Primjeru 2.17, dobijemo da je $I_t = B_t$ i $df(I_t) = 2B_t dB_t + dt$. Obzirom da t ne možemo prikazati kao Itôv integral obzirom na Brownovo gibanje, slijedi da proces $f(I)$ nije Itôv integral obzirom na Brownovo gibanje. Stoga uvodimo širu klasu slučajnih procesa, za koju ćemo pokazati da uključuje i funkcije Itôvog integrala. To su Itôvi procesi za koje ćemo u daljnjem razviti stohastički diferencijalni račun.

Definicija 2.18. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija. **Itôv proces** je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s \, dB_s + \int_0^t V_s \, ds \,, \tag{2.25}$$

gdje je $X_0 \in \mathbf{R}$, a $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ su adaptirani procesi t.d. $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ i $\int_0^t |V_s| \, ds < \infty$ g.s. za sve $t \geq 0$.

Uočimo da je slučajni proces $(B_t^2 : t \geq 0)$ iz Primjera 2.17 Itôv proces. Uistinu, procesi $H = (2B_t : t \geq 0)$ i $V = 1$ zadovoljavaju uvjete iz Definicije 2.18 te je B_t^2 dan formulom (2.25).

Napomena 2.19. (a) Jednadžbu (2.25) možemo zapisati u diferencijalnom obliku

$$dX_t = H_t dB_t + V_t dt.$$

(b) Kvadratna varijacija Itôvog procesa (2.25) jednaka je

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds \,. \tag{2.26}$$

Uistinu, korištenjem do sada uspostavljenog diferencijalnog računa za Itôv integral (u skraćenom zapisu) dobijemo

$$\begin{aligned} d\langle X \rangle_t &= dX_t \cdot dX_t = (H_t dB_t + V_t dt)(H_t dB_t + V_t dt) \\ &= H_t^2 dB_t \cdot dB_t + 2H_t V_t dB_t \cdot dt + V_t^2 dt \cdot dt = H_t^2 dt. \end{aligned}$$

(c) Uočimo da kvadratna varijacija Itôvog procesa X u potpunosti dolazi od člana $I_t = \int_0^t H_s \, dB_s$. Običan integral $R_t = \int_0^t V_s \, ds$ ne doprinosi ništa kvadratnoj varijaciji od X, i on sam ima kvadratnu varijaciju nula: $\langle R \rangle_t = 0$. Međutim, to ne znači da je R deterministički, nego samo da je manje volatilan od I. Za male vrijednosti $h > 0$,

$$R_{t+h} \approx R_t + V_t h \,,$$

što daje dobru procjenu za R_{t+h}. Primjetite da su u trenutku t vrijednosti R_t i V_t poznate. S druge strane,

$$I_{t+h} \approx I_t + H_t(B_{t+h} - B_t) \,,$$

što ne možemo dobro predvidjeti zbog nepoznavanja prirasta $B_{t+h} - B_t$.

Sada želimo definirati stohastički integral u odnosu na Itôv proces X.

Definicija 2.20. Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (2.25), te neka je $K = (K_t : t \geq 0)$ adaptiran proces koji zadovoljava sljedeće tehničke uvjete:

$$\mathbf{E} \int_0^t K_s^2 H_s^2 \, ds < \infty \text{ i } \int_0^t |K_s V_s| \, ds < \infty$$

za sve $t \geq 0$. Stohastički integral od K s obzirom na Itôv proces X definiran je formulom

$$\int_0^t K_s \, dX_s = \int_0^t K_s H_s \, dB_s + \int_0^t K_s V_s \, ds \,. \tag{2.27}$$

Uočimo da tehnički uvjeti na proces K u prethodnoj definiciji osiguravaju da je stohastički integral od K s obzirom na X dobro definiran Itôv proces (Definicija 2.18), tj. da formula (2.27) ima smisla.
Sljedeći rezultat je Itôva formula za Itôve procese, koja je generalizacija Itôve formule (2.24) za Brownovo gibanje. Dodatno, zbog kasnijih primjena na Black-Scholes-Mertonov model, promatrat ćemo funkcije $f : [0, \infty\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te slučajne procese oblika $f(t, X_t)$ koji mogu ovisiti i o vremenskoj komponenti kao i o vrijednosti X_t.

Teorem 2.21. *(Itôva formula za Itôv proces) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (2.25) i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, X_t) \, dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) \, d\langle X \rangle_t \\ &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, X_t) H_t \, dB_t \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X_t) V_t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 \, dt \,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Prije nego prezentiramo skicu dokaza ovog rezultata, navedimo nekoliko napomena.

Napomena 2.22. (a) Itôva formula jednostavnije se pamti u diferencijalnom obliku:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) \, dt + f_x(t, X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) \, dX_t \cdot dX_t \,. \tag{2.29}$$

(b) Formula (2.28) za Brownovo gibanje glasi

$$f(T, B_T) = f(0, 0) + \int_0^T f_t(t, B_t) \, dt + \int_0^T f_x(t, B_t) \, dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, B_t) \, dt,$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$df(t, B_t) = f_t(t, B_t) \, dt + f_x(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) \, dt \,.$$

Uočimo da iz gornjeg izraza dobijemo Itôvu formulu (2.24) za Brownovo gibanje kada je $f \in C^2(\mathbb{R})$ funkcija jedne varijable.

Skica dokaza Teorema 2.21:

Formulu (2.28) pokazat ćemo za funkciju $f \in C^2([0,\infty\rangle \times \mathbb{R})$ t.d. su funkcije f, f_t, f_x, f_{xx} apsolutno omeđene s konstantom $M > 0$, te za Itôv proces X oblika

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t V_s ds, \tag{2.30}$$

gdje je $V = (V_t : t \geq 0)$ adaptiran proces t.d. je $|V_s| \leq M$ za sve $s > 0$ gotovo sigurno. Uočimo da Itôv proces X ima gotovo sigurno neprekidne trajektorije.
Prisjetimo se Taylorove formule funkcije dvaju varijabli. Neka su $t, s > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$, tada je

$$\begin{aligned} f(t,x) - f(s,y) &= f_t(s,y)(t-s) + f_x(s,y)(x-y) + \frac{1}{2} f_{tt}(s,y)(t-s)^2 \\ &\quad + f_{tx}(s,y)(t-s)(x-y) + \frac{1}{2} f_{xx}(s,y)(x-y)^2 + R(t,s,x,y)\,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

gdje je R funkcija ostatka takva da je

$$\lim_{t\to s} \lim_{x \to y} R(t,s,x,y) = 0.$$

Fiksirajmo $T \geq 0$ i neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ particija intervala $[0, T]$. Koristeći formulu (2.31) za $x = X_{t_{j+1}}$, $y = X_{t_j}$, $t = t_{j+1}$ i $s = t_j$ dobijemo

$$\begin{aligned} f(T, X_T) - f(0, X_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - f(t_j, X_{t_j})] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2 \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j)(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \\ &+ \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j)^2 + R(X_{t_{j+1}}, X_{t_j}, t_{j+1}, t_j)\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Kada pustimo $||\Pi|| \to 0$, lijeva strana ostaje ista. Da bismo pokazali da jednakost (2.28) vrijedi g.s. dovoljno je naći jedan niz particija $(\Pi_k)_k$ t.d. desna strana (2.32) konvergira k desnoj strani (2.28) g.s. Proučavamo što se događa s članovima na desnoj strani:

- Za prvi član imamo[23]

  $$\lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j) = \int_0^T f_t(t, X_t)\, dt\,,$$

  gdje je na desnoj strani obični Lebesgueov (Riemannov) integral. Uočimo da gornji integral ima smisla za skoro svaki $\omega \in \Omega$ jer je funkcija $t \mapsto f_t(t, X_t(\omega))$ neprekidna.
- Drugi član, $\sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})$, konvergira prema Itôvom integralu $\int_0^T f_x(t, X_t)\, dX_t$. Zaista, označimo

  $$H_t = f_x(t, X_t), \quad H_t^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, X_{t_j}) 1_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

[23]Uočite da je za $\omega \in \Omega$ lijeva strana upravo Riemannova suma funkcije $t \mapsto f(t, X_t(\omega))$ na particiji Π.

Kako je po pretpostavci s početka dokaza $|f_x| \leq M$, slijedi da je $H \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ i $H^{(n)} \in \mathcal{E}_T$. Štoviše, zbog neprekidnosti funkcije f_x i gotovo sigurno neprekidnosti procesa X, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je proces H neprekidan u srednjem reda 2, odnosno

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\mathbf{E}[(f_x(s,X_s)-f_x(t,X_t))^2] &= \mathbf{E}[\lim_{s\to t}(f_x(s,X_s)-f_x(t,X_t))^2]\\ &= \mathbf{E}[(f_x(t,\lim_{s\to t}X_s)-f_x(t,X_t))^2]=0.\end{aligned}$$

Sada po Propoziciji 2.15 slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}(H^{(n)}\circ B)_t=(H\circ B)_t,$$

odnosno

$$\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j,X_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})=\int_0^T f_x(t,X_t)\,dB_t.$$

Dodatno, uočimo da vrijedi[24]

$$\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j,X_{t_j})\int_{t_j}^{t_{j+1}} V_s ds=\int_0^T f_x(t,X_t)V_t dt.$$

Tvrdnja sada slijedi iz (2.30) zbrajanjem zadnjih dviju jednakosti.

- Treći član možemo rastaviti na tri dijela,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2\\ &+\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\int_{t_j}^{t_{j+1}} V_s ds\\ &+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} V_s ds\right)^2\\ &= S_1+S_2+S_3. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Pokažimo prvo da S_1 konvergira prema običnom Lebesgueovom (Riemannovom) integralu $\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X_t)\,dt$. To je posljedica činjenice da Brownovo gibanje ima ne-nul kvadratnu varijaciju. Ideja je da se $(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2$ zamijeni s $t_{j+1}-t_j$, te tada prijeđe na limes. Vrijedi

$$\begin{aligned}&(S_1-\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X_t)\,dt)^2\\ &\leq\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2-\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})(t_{j+1}-t_j)\right)^2\\ &+\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j,X_{t_j})(t_{j+1}-t_j)-\int_0^T f_{xx}(t,X_t)\,dt\right)^2.\end{aligned}$$

[24]Ovdje koristimo da je $\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} g(t_j)\int_{t_j}^{t_{j+1}} h(s)ds=\int_0^T g(t)h(t)dt$ za neprekidne funkcije g i h.

Uočimo da drugi član u sumi konvergira u 0 g.s. po definiciji Riemannovog integrala. Dodatno, uz oznake $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ i $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta B_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j\right)^2\right] \\
&= \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbf{E}\left[f_{xx}(t_i, X_{t_i}) f_{xx}(t_j, X_{t_j})(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)(\Delta B_j^2 - \Delta t_j)\right] \\
&\leq M^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbf{E}\left[(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)(\Delta B_j^2 - \Delta t_j)\right] = M^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}\left[(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)^2\right],
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili da su za $i \neq j$ slučajne varijable $\Delta B_i^2 - \Delta t_i$ i $\Delta B_j^2 - \Delta t_j$ nezavisne i da je $\mathbf{E}[\Delta B_i^2] = \Delta t_i$. Kako je

$$\mathbf{E}\left[(\Delta B_i^2 - \Delta t_i)^2\right] = \mathbf{E}[\Delta B_i^4] - 2\Delta t_i \mathbf{E}[\Delta B_i^2] + \Delta t_i^2 = 2\Delta t_i^2,$$

tvrdnja za S_1 sada slijedi iz[25]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta B_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j\right)^2\right] \\
&\leq 2M^2 \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i^2 \leq 2M^2 ||\Pi|| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = 2M^2 ||\Pi|| T \xrightarrow{||\Pi||\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Sljedeće, pokažimo da suma S_2 konvergira prema 0 (u srednjem reda 2). To slijedi iz omeđenosti funkcije f_{xx} i procesa V te ocjene

$$\mathbf{E}[S_2^2] \leq M^4 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^2 \mathbf{E}[\Delta B_j^2] = M^4 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^3 \leq M^4 T ||\Pi||^2 \xrightarrow{||\Pi||\to 0} 0.$$

Analognim argumentom za sumu S_3 dobijemo

$$S_3 \leq M^3 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^2 \leq M^3 T ||\Pi|| \xrightarrow{||\Pi||\to 0} 0.$$

Time smo pokazali da treći član konvergira k $\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)dt$.

- Za četvrti član, zbog g.s. neprekidnosti procesa X imamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{||\Pi||\to 0} \left|\sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1} - t_j)(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})\right| \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, X_{t_j})|(t_{j+1} - t_j)|X_{t_{j+1}} - X_{t_j}| \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, X_{t_j})|(t_{j+1} - t_j) \\
&= 0 \cdot \int_0^T |f_{tx}(t, X_t)|\, dt = 0\,.
\end{aligned}$$

[25] Uočimo da smo pokazali da $S_1 \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_y)dt$ pa postoji niz particija za koji imamo konvergenciju g.s.

- Za peti član slično dobijemo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{||\Pi||\to 0} |\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, X_{t_j})(t_{j+1}-t_j)^2| \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, X_{t_j})| \cdot (t_{j+1}-t_j)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \lim_{||\Pi||\to 0} ||\Pi|| \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, X_{t_j})| \cdot (t_{j+1}-t_j) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_0^T |f_{tt}(t, X_t)|\, dt = 0\,.
\end{aligned}
$$

Sličnim argumentom kao na početku dokaza može se pokazati da

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} R(X_{t_{j+1}}, X_{t_j}, t_{j+1}, t_j) = 0,$$

čime je dokaz teorema završen. □

Primjer 2.23. (Generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija, te neka su $\alpha = (\alpha_t : t \geq 0)$ i $\sigma = (\sigma_t : t \geq 0)$ adaptirani procesi t.d. $\sigma \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}$ i $\int_0^t |\alpha_s| ds < \infty$ za svaki $t \geq 0$. Definiramo Itôv proces

$$X_t = \int_0^t \sigma_s\, dB_s + \int_0^t \left(\alpha_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) ds\,, \tag{2.34}$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$dX_t = \sigma_t\, dB_t + \left(\alpha_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) dt\,.$$

Vrijedi

$$dX_t\, dX_t = \sigma_t^2\, dB_t\, dB_t = \sigma_t^2\, dt\,.$$

Neka je $S_0 > 0$ realan broj i $f(x) = S_0 e^x$. Definiramo proces $S = (S_t : t \geq 0)$ kao $S_t = f(X_t)$. Kako je $f'(x) = f''(x) = S(0)e^x$ iz Itôve formule dobivamo

$$
\begin{aligned}
dS_t = df(X_t) &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, dX_t\, dX_t \\
&= S_0 e^{X_t}\, dX_t + \frac{1}{2} S_0 e^{X_t}\, dX_t\, dX_t \\
&= S_t\, dX_t + \frac{1}{2} S_t\, dX_t\, dX_t \\
&= \alpha_t S_t\, dt + \sigma_t S_t\, dB_t\,,
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

odnosno zapisano u integralnom obliku

$$S_t = \int_0^t \alpha_s S_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 S_s dB_s.$$

Iz jednadžbe (2.35) vidimo da cijena imovine S_t ima trenutnu srednju stopu povrata α_t i volatilnost σ_t. I trenutna srednja stopa povrata i volatilnost mogu se mijenjati kroz vrijeme. Proces S zovemo **generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje** i predstavlja najopćenitiji model kretanja cijena financijske imovine koje je neprekidno, pozitivno, i ima

jedan izvor nesigurnosti (Brownovo gibanje B). Usprkos tome što model pokreće Brownovo gibanje, distribucija od S ne mora biti log-normalna. U slučaju konstantnih neslučajnih α i σ, gornji model svodi se na geometrijsko Brownovo gibanje i log-normalnu razdiobu.
Pretpostavimo da su α i σ konstantni i neslučajni. Tada iz formule (2.34) slijedi

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right) t\right\}\,, \tag{2.36}$$

a diferencijalni oblik (2.35) na

$$dS_t = \alpha S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t\,.$$

Pretpostavimo na trenutak da je $\alpha = 0$. Tada S_t zadovoljava $dS_t = \sigma S_t\,dB_t$. Iz desne strane vidi se da je u tom slučaju

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\}$$

martingal (vidi i Zad 6). U općem slučaju konstantnog α, iz (2.36) imamo

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\} e^{\alpha t}\,.$$

Budući da je zbog martingalnosti $\mathbf{E}\exp\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\} = 1$, dobivamo da je $\mathbf{E}S_t = \mathbf{E}S_0 e^{\alpha t}$. To znači da je srednja stopa povrata od S jednaka α.
Za nekonstantnu volatilnost σ na isti način zaključujemo da je

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\,ds\right\} \tag{2.37}$$

martingal.

Sljedeći rezultat daje nam neke dovoljne uvjete pod kojima S_t ima log-normalnu razdiobu.

Teorem 2.24. *(Itôv integral za deterministički integrand) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ neslučajna funkcija vremena t.d. $\int_0^t f^2(s)ds < \infty$ za svaki $t > 0$. Definiramo $I_t = \int_0^t f(s)\,dB_s$. Tada je za svaki $t \geq 0$ slučajna varijabla I_t normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t f(s)\,ds$.*

Dokaz. Uočimo da je Itôv integral $I = (I_t : t \geq 0)$ dobro definiran s obzirom na to da je $f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$. Pri tome funkciju f promatramo kao funkciju $f : [0, \infty\rangle \times \Omega \to \mathbb{R}$ definiranu kao $f(t, \omega) := f(t)$. Stoga je proces I martingal za koji je $I_0 = 0$, pa odmah slijedi da je $\mathbf{E}I_t = \mathbf{E}I_0 = 0$. Varijanca od I_t izračunata je u Teoremu 2.11 (c):

$$\mathrm{Var} I_t = \mathbf{E}I_t^2 = \mathbf{E}\int_0^t f^2(s)\,ds = \int_0^t f^2(s)\,ds\,,$$

jer je f neslučajna funkcija.
Preostaje dokazati da je I_t normalno distribuirana. To ćemo pokazati računanjem funkcije izvodnice momenata slučajne varijable I_t, $\mathbf{E}e^{uI_t}$, $u \in \mathbf{R}$. Stavimo u formulu (2.37) $\sigma_s = uf(s)$ i $S_0 = 1$. Slijedi da je proces

$$\exp\left\{\int_0^t uf(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (uf(s))^2\,ds\right\}$$

martingal koji je u trenutku $t = 0$ jednak 1. Slijedi

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{\int_0^t uf(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (uf(s))^2\,ds\right\}\right] = 1\,. \tag{2.38}$$

Gornju formulu možemo napisati u obliku

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{uI_t - \frac{1}{2}\,u^2\int_0^t f^2(s)\,ds\right\}\right] = 1\,,$$

odnosno,

$$\mathbf{E}e^{uI_t} = \exp\left\{\frac{1}{2}\,u^2\int_0^t f^2(s)\,ds\right\}\,, \quad u \in \mathbf{R}\,.$$

Na desnoj strani je funkcija izvodnica momenata normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t f^2(s)\,ds$. $\square$