Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 12. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Riješite sljedeće linearne SDJ:

(a) $dX_t = adt + X_t dB_t$, $X_0 = 0$,

(b) $dX_t = (a + X_t)dB_t$, $X_0 = 0$,

(c) $dX_t = X_t dt + dB_t$, $X_0 = 0$,

(d) $dX_t = 4X_t dt + 2X_t dB_t$, $X_0 = 2$,

(e) $dX_t = tX_t dB_t$, $X_0 = 1$.

Zadatak 13. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Dokažite da je $X = (X_t : t \geq 0)$ također Brownovo gibanje ako je

(a) $X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$

(b) $X_t = \int_0^t H_s dB_s$,

pri čemu je $H = (H_t : t \geq 0)$ adaptiran proces t.d. je Lebesgueova mjera skupa $\{t \geq 0 : |H_t| \neq 1\}$ jednaka 0 $\mathbf{P}$-gotovo sigurno.

Zadatak 14. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, $T > 0$ i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija generirana Brownovim gibanjem B. Ako je Y $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla s konačnim očekivanjem, pokažite da postoji adaptirani proces $\theta = (\theta_t : t \in [0, T])$ t.d. je

$$Y = \mathbf{E}Y + \int_0^T \theta_t dB_t.$$

Zadatak 15. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i proces $B^* = (B_t^* : t \geq 0)$ dan s

$$B_t^* = B_t + \sin(t).$$

Odredite mjeru $\mathbb{P}^*$ obzirom na koju je B^* Brownovo gibanje.

Zadatak 16. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Promotrimo Bachelierov model financijskog tržišta, gdje je cijena dionice modelirana s

$$dS_t = \alpha dt + \sigma dB_t, \ t > 0,$$

za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, gdje je $S_0 > 0$ početna cijena dionice i kamatna stopu je $r = 0$.

(a) Odredite razdiobu slučajne varijable S_t (obzirom na $\mathbb{P}$).

(b) Pokažite da je model tržišta potpun.

(c) Izračunajte cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i dospijećem $T > 0$.

(d) Je li portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \geq 0)$

(d1) $\phi = ((-S_t^2 - \sigma^2 t, 2S_t) : t \geq 0)$

(d2) $\phi = \left(\left(-\int_0^t S_u du, t^2\right) : t \geq 0\right)$

samofinancirajući?

Zadatak 17. Promatramo BSM model financijskog tržišta s neprekidnim isplaćivanjem dividende na dionicu,

$$\begin{aligned} dR_t &= rR_t dt,\ R_0 = 1 \\ dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t - aS_t dt, \end{aligned}$$

gdje su stopa povrata $\alpha > 0$, volatilnost $\sigma > 0$, kamatna stopa $r > 0$ i stopa dividendi $a > 0$ konstantni. Odredite cijenu u trenutku t europske call opcije s datumom dospijeća T i cijenom izvršenja K.

Zadatak 18. Promatramo BSM model financijskog tržišta s konstantnim koeficijentima $\alpha, \sigma, r > 0$. Odredite cijenu u trenutku $t = 0$ *down-and-out* binarne opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i barijerom $b < S_0$, $C = K1_{\{m_T > b\}}$.

---

12. (a) $X_t = a\int_0^t e^{B_t - B_s - \frac{1}{2}(t-s)}ds$, (b) $X_t = a\left[\int_0^t e^{B_t - B_s - \frac{1}{2}(t-s)}dB_s - \int_0^t e^{B_t - B_s - \frac{1}{2}(t-s)}ds\right]$, (c) $X_t = B_t + \int_0^t e^{t-s}B_s ds$, (d) $X_t = 2e^{2(t+B_t)}$, (e) $X_t = e^{\int_0^t s dB_s - \frac{1}{6}t^3}$.

15. Za $A \in \mathcal{F}_T$ je $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}^*\left[e^{-B_T \cos T - \int_0^T \sin t B_t dt - \frac{1}{8}\sin(2T) - \frac{T}{4}} 1_A\right]$.

16. a) $S_t \sim N(S_0 + \alpha t, \sigma^2 t)$; c) $C_0 = (S_0 - K)\Phi(d) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}e^{-d^2/2}$, $d = \frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}$; d1) da; d2) ne

17. vidi str 159-161 u skripti ZV.

18. $C_0 = Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{b}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$.