Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja 2

Zadatak 1. Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje.

(a) Odredite razdiobu slučajne varijable $X = B_1 + B_2 + B_3$.

(b) Neka je $Y \sim N(0, \sigma^2)$. Izračunajte funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable Y, te $\mathbb{E}[Y^3]$ i $\mathbb{E}[Y^4]$. Neka je $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. Odredite funkciju izvodnicu momenata za Z.

(c) Neka je $W = \int_0^1 B_t^2 dt$. Dokažite da je W slučajna varijabla i izračunajte $\mathrm{Var}(W)$.

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Je li proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ također Brownovo gibanje, gdje je:

(a) $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$, $t \geq 0$, $c > 0$.

(b) $X_t = tB_{1/t}$, $t > 0$ i $X_0 = 0$.

(c) $X_t = \sqrt{t} B_1$, $t \geq 0$.

(d) $X_t = -B_t$, $t \geq 0$.

(e) $X_t = B_{3t} - B_t$, $t \geq 0$.

(f) $X_t = B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$, $T > 0$.

Zadatak 3. Neka su $B^{(1)} = (B_t^{(1)})_{t\geq 0}$ i $B^{(2)} = (B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ nezavisna Brownova gibanja. Za koje vrijednosti parametara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je proces W,

$$W_t = \alpha B_t^{(1)} + \beta B_t^{(2)}, \ t \geq 0$$

Brownovo gibanje? Objasnite

Zadatak 4. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Dokažite da je proces $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ Gaussovski (odnosno da je $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m})$ normalno distribuiran slučajni vektor za sve $m \in \mathbb{N}$ i $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$), odredite mu kovarijacijsku funkciju ($\gamma(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$), te funkciju gustoće slučajnog vektora (X_s, X_t), $0 < s < t$, gdje je

(a) $X_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1$.

(b) $X_t = e^{-\alpha t/2} B_{e^{\alpha t}}$, $t \geq 0$.

Zadatak 5. Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Dokažite da je proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ definiran s

$$X_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds, \ t \geq 0,$$

martingal obzirom na prirodnu filtraciju za B.

Zadatak 6. Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje i $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažite da je slučajni proces $X = X_t : t \geq 0$ definiran s $X_t = \exp(aB_t + bt)$, $t \geq 0$ martingal ako i samo ako je $a^2 + 2b = 0$.

Zadatak 7.

(a) Odredite 1-varijaciju and 2-varijaciju funkcije $f(t) = t$.

(b) Pokažite da je kvadratna kovarijacija dvaju nezavisnih Brownovih gibanja konačna i jednaka 0.

Zadatak 8. Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ proizvoljna subdivizija intervala $[0, T]$.

(a) Pokažite da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}}^2 (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = \frac{1}{3} B_T^3 - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^3 - \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2.$$

(b) Korištenjem (a) dijela i Propozicije 2.15 odredite Itôv integral

$$I_T = \int_0^T B_t^2 dB_t.$$

Dodatno, provjerite da integrand u integralu I_T zadovoljava uvjete Propozicije 2.15.

(c) Označimo s $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ sredinu intervala $[t_j, t_{j+1}]$, te definiramo

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_j^*} - B_{t_j})^2.$$

Odredite $\mathbb{E}[Q_\Pi]$, $\mathrm{Var}(Q_\Pi)$ i $(\mathbb{P}) \lim\limits_{||\Pi|| \to 0} Q_\Pi$.

(d) Stratonovičev integral Brownovog gibanja B obzirom na samog sebe definira se kao

$$SI_T = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j^*} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Korištenjem (c) dijela i izraza za Itôv integral $\int_0^T B_t dB_t$ odredite SI_T.

Zadatak 9. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Odredite varijancu slučajne varijable X ako je

(a) $X = \int_0^1 e^t (\sin(B_t) + \cos(B_t)) dB_t$

(b) $X = \int_0^1 \mathrm{sh}(B_t) dB_t$

Zadatak 10. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $X = (X_t : t \geq 0)$ slučajan proces definiran s $X_t = (1 + \frac{1}{3} B_t)^3$. Primjenom Itôve formule dokažite da proces X zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = \tfrac{1}{3} X_t^{1/3} + X_t^{2/3} dB_t, \; X_0 = 1.$$

Zadatak 11. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Primjenom Itôve formule dokažite da je slučajan proces $X = (X_t : t \geq 0)$, definiran s $X_t = e^{\frac{t}{2}} \cos B_t$, martingal obzirom na Brownovsku filtraciju.

---

1. a) $X \sim N(0, 14)$, b) $\varphi_Y(\lambda) = e^{\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$, $\mathbb{E}[Y^3] = 0$, $\mathbb{E}[Y^4] = 3\sigma^4$, $\varphi_Z(\lambda) = e^{\mu\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$, (c) $\mathrm{Var}(W) = \frac{1}{3}$.
2. a) da, b) da, c) ne , d) da, e) ne, f) da.
3. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
4. a) $\gamma(s,t) = \min\{s,t\}(1 - \max\{s,t\})$, b) $\gamma(s,t) = e^{\frac{\alpha}{2}(\min\{s,t\} - \max\{s,t\})}$.
5. c) Neka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ v.p. Prvo pokažite da vrijedi: $\mathbb{E}[\int_0^t X_s ds | \mathcal{G}] = \int_0^t \mathbb{E}[X_s|\mathcal{G}]ds$, za svaku σ-algebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
7. a) $V_t(f) = t$, b) $V_t^{(2)}(f) = 0$.
8. b) $I_T = \frac{1}{3}B_T^3 - \int_0^T B_t dt$, c) $\mathbb{E}[Q_\Pi] = \frac{T}{2}$, $\mathrm{Var}(Q_\Pi) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j)^2$, $(\mathbb{P}) \lim_{||\Pi|| \to 0} Q_\Pi = \frac{T}{2}$, d) $SI_T = \frac{1}{2}B_T^2$.
9. (a) $\frac{e^2-1}{2}$, (b) $\frac{e^2-3}{4}$