# FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 30. lipnja 2023.

**Zadatak 1.** Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(a) (3 boda) Odredite $\mathbf{E}(X_t)$ za Itôv proces $X = (X_t : t \geq 0)$ dan Cox-Ingersoll-Rossovom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \quad X_0 = x > 0.$$

(b) (3 boda) Iskažite Girsanovljev teorem.

(c) (2 boda) Dokažite da je mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ iz Girsanovljevog teorema vjerojatnosna i ekvivalentna s $\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_T}$. Sve tvrdnje obrazložite.

(d) (4 boda) Primjenom Girsanovljevog teorema odredite

$$\mathbf{E}\left[(B_t + e^{-t})^2 \cdot e^{\int_0^t e^{-s}dB_s}\right].$$

*Rješenje.*

(a) Iz integralnog obliha stohastičke diferencijalne jednadžbe primjenom Fubinijevog teorema i činjenice da je očekivanje Itôvog integrala jednako nula dobivamo

$$m(t) := \mathbf{E}[X_t] = x + \int_0^t (\alpha - \beta m(s))ds$$

odnosno $m'(t) = \alpha - \beta m(t)$. Množenjem s $e^{\beta t}$ slijedi da je

$$(e^{\beta t}m(t))' = \alpha e^{\beta t}$$

odnosno $m(t) = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t}$. Uvrštavanjem početnog uvjeta $m(0) = x$ slijedi da je

$$m(t) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + xe^{-\beta t}.$$

(b) Teorem 4.4

(c) Kako je proces $(Z_t : t \in [0, T])$ martingal slijedi da je $\mathbf{E}[Z_T] = \mathbf{E}[Z_0] = 1$. Stoga je

$$\mathbf{P}^*(\Omega) = \mathbf{E}[Z_T] = 1.$$

Kako je ujedno i $\mathbf{P}(Z_T > 0) = 1$, slijedi da je

$$\mathbf{P}(A) > 0 \iff \mathbf{P}^*(A) = \mathbf{E}[Z_T 1_A] > 0, \ A \in \mathcal{F}_T$$

pa vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$ na $\mathcal{F}_T$.

(d) Ideja je eliminirati eksponencijalni član pod očekivanjem i to tako da definiramo vjerojatnosnu mjeru

$$\widetilde{P}(A) = \mathbf{E}\left[e^{\int_0^t e^{-s}dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2s}ds} 1_A\right], \ A \in \mathcal{F}_t.$$

Uočimo da je po Girsanovljevom teoremu proces $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_s : s \in [0, t])$ definiran s $\widetilde{B}_s = B_t - \int_0^t e^{-s}ds = B_t + e^{-t} - 1$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost $\widetilde{\mathbf{P}}$. Slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[(B_t + e^{-t})^2 \cdot e^{\int_0^t e^{-s}dB_s}\right] &= e^{\frac{1}{2}\int_0^t e^{-2s}ds}\widetilde{\mathbf{E}}\left[(B_t + e^{-t})^2\right] = e^{\frac{1}{4}(1-e^{-2t})}\widetilde{\mathbf{E}}\left[(\widetilde{B}_t - 1)^2\right] \\
&= e^{\frac{1}{4}(1-e^{-2t})}\left(\widetilde{\mathbf{E}}[\widetilde{B}_t^2] - 2\widetilde{\mathbf{E}}[\widetilde{B}_t] + 1\right) = (t+1)e^{\frac{1}{4}(1-e^{-2t})},
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili činjenicu da je $\widetilde{B}_t \overset{\widetilde{\mathbf{P}}}{\sim} N(0, t)$.

# FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 30. lipnja 2023.

**Zadatak 2.** Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s cijenom dionice u trenutku $0 \leq t \leq T$ jednakom $S_t$ i konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata $\alpha$, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$.

(a) (4 boda) Definirajte pojmove ekvivalentne martingalne mjere i arbitraže.

(b) (3 boda) Odredite stohastičku diferencijalnu jednadžbu za diskontiranu cijenu dionice u ovom modelu.

(c) (3 boda) Obrazložite dopušta li ovaj model arbitražu. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

*Rješenje.*

(a) Definicija 4.8 i odjeljak iznad nje.

(b) Lema 3.1, primjenom Itôve formule dokazujemo da vrijedi

$$d\widetilde{S}_t = (\alpha - r)\widetilde{S}_t dt + \sigma \widetilde{S}_t dB_t.$$

(c) Definiramo $B_t^* = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma} t$. Uočimo da je tada

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t dB_t^*.$$

Kako je po Girsanovljevom teoremu proces $B^* = (B_t^* : \ t \in [0,T])$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost

$$\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{E}\left[e^{-\frac{\alpha - r}{\sigma} B_T - \frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2} T} 1_A\right], \ A \in \mathcal{F}_T$$

slijedi da je $\widetilde{S}$ $\mathbf{P}^*$-martingal (jer je Itôv integral). Kako je $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$ slijedi da je $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera na tržištu. Stoga po 1. fundamentalnom teoremu određivanja cijena, model tržišta ne dopušta arbitražu.

# FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 30. lipnja 2023.

**Zadatak 3.** Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s cijenom dionice u trenutku $0 \leq t \leq T$ jednakom $S_t$ i konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata $\alpha$, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$.

(a) (4 boda) Odredite razdiobu slučajne varijable $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru na tržištu. Obrazložite zašto je ta slučajna varijabla nezavisna od $S_t$.

(b) (6 bodova) Dokažite da je vrijednost europske call-opcije s dospijećem $T > 0$ i cijenom izvršenja $K > 0$ u trenutku $0 \leq t \leq T$ dana s $c(t, S_t)$, gdje je

$$c(t,x) = x\Phi(d_+(T-t,x)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(T-t,x)),$$

te $d_\pm(\tau,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]$.

(c) (4 boda) Pretpostavimo da je $\alpha = 0.2, \sigma = 0.3$, te da je godišnja kamatna stopa na tržištu novca je 5 %. Odredite gamu europske call-opcije s dospijećem 15 mjeseci i cijenom izvršenja 410 kn u trenutku $t = 1$ godina ako je $S_1 = 400$. Možete koristiti da je $c_x(t,x) = \Phi(d_+(T-t,x))$.

*Rješenje.*

(a) Iz jednakosti (4.32) izvedemo jednakost (4.36) iz koje slijedi da je

$$\ln\frac{S_T}{S_t} = \sigma(B_T^* - B_t^*) + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t),$$

gdje je $B^*$ proces iz Zadatka 2 c). Kako je $B_T^* - B_t^* \overset{\mathbf{P}^*}{\sim} N(0, T-t)$ slijedi da je

$$\ln\frac{S_T}{S_t} \overset{\mathbf{P}^*}{\sim} N((r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)).$$

Nezavisnost slijedi iz činjenice da su $B_T^* - B_t^*$ i $B_t^*$ nezavisne slučajne varijable te je $\ln\frac{S_T}{S_t} = f(T-t, B_T^* - B_t^*)$ i $S_t = S_0 e^{f(t, B_t^*)}$, pri čemu je $f(s,x) = \sigma x + (r - \frac{\sigma^2}{2})s$.

(b) Raspis sa str. 66-67.

(c) Uočimo prvo da je

$$\Gamma_t = c_{xx}(t, S_t) = n(d_+(T-t, S_t))d_+'(T-t, S_t) = \frac{e^{-d_+(T-t,S_t)^2/2}}{x\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}},$$

Parametri modela su $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.3$, $S_1 = 400$, $r = 0.05$, $T = \frac{15}{12} = 1.25$ i $K = 410$ pa je

$$d_+ = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{400}{410} + (0.05 + \frac{0.3^2}{2})0.25}{0.3\sqrt{0.25}} \approx -0.1563.$$

Stoga je $\Gamma_t = \frac{e^{-d_+^2/2}}{400 \cdot 0.3\sqrt{2\pi 0.25}} \approx 0.00657.$

# FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 30. lipnja 2023.

**Zadatak 4.** Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(a) (4 boda) Neka je $M_t^B = \max_{s\in[0,t]} B_s$. Dokažite da vrijedi

$$\mathbf{P}(M_t^B > x, B_t \leq x) = \mathbf{P}(B_t \geq x), \qquad x > 0.$$

(b) (2 boda) Neka je $\mu \in \mathbf{R}$. Korištenjem izraza

$$\mathbf{P}(\max_{0\leq s\leq t}(B_s + \mu s) \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x+\mu t}{\sqrt{t}}\right),\ x > 0$$

izvedite formulu za $\mathbf{P}(\min_{0\leq s\leq t}(B_s + \mu s) \geq x)$, $x < 0$.

(c) Cijena dionice modelirana je geometrijskim Brownovim gibanjem s parametrima $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$. Početna cijena dionice je $S_0 > 0$, a godišnja kamatna stopa je $r > 0$.

(b1) (4 boda) Odredite cijenu up-and-in binarne opcije s cijenom izvršenja $K$, barijerom $b$ i dospijećem 4 mjeseca.

(b2) (4 boda) Izračunajte vjerojatnost da vrijednost opcije pod (b1) bude nula u trenutku dospijeća.

*Rješenje.*

(a) Vidi (4.44) iz dokaza Teorema 4.17.

(b) Iz simetrije Brownovog gibanja slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\min_{0\leq s\leq t}(B_s + \mu s) \geq x) &= \mathbf{P}(-\max_{0\leq s\leq t}(-B_s - \mu s) \geq x)\\
&= \mathbf{P}(\max_{0\leq s\leq t}(-B_s - \mu s) \leq -x)\\
&= \mathbf{P}(\max_{0\leq s\leq t}(B_s - \mu s) \leq -x)\\
&= \Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2\mu x}\Phi\left(\frac{x+\mu t}{\sqrt{t}}\right), x < 0.
\end{aligned}$$

(c1) Traži se cijena slučajnog zahtjeva

$$C = K \cdot 1_{\{\max\limits_{0\leq t\leq T} S_t \geq b\}}\,,$$

gdje je $T = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Neka je $\mathbf{P}^\star$ ekvivalentna martingalna mjera uz koju je

$$B_t^\star = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma}t$$

Brownovo gibanje. Tada je cijena slučajnog zahtjeva $C$ dana s

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathbf{E}^\star[e^{-rT}C] = \mathbf{E}^\star[Ke^{-rT}1_{\{\max\limits_{0\leq t\leq T} S_t \geq b\}}]\\
&= Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\max_{0\leq t\leq T} S_t \geq b) = Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\max_{0\leq t\leq T}(B_t^\star + (\tfrac{r}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \geq \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{b}{S_0})\\
&= Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\max_{0\leq t\leq T}(B_t^\star + \mu t) \geq x)\,,
\end{aligned}$$

pa koristeći formulu za funkciju distribucije maksimuma Brownovog gibanja s driftom dobije se

$$V_0 = Ke^{-rT}(1 - \mathbf{P}^\star(\max_{0\le t\le T}(B_t^\star + \mu t) \le x)) = Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{-x + \mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right) + e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x + \mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right)\right],$$

za $x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}$ i $\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$.

(c2) Tražimo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\max_{0\le t\le T} S_t \le b) &= \mathbf{P}(\max_{0\le t\le T} S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t} \le b) \\
&= \mathbf{P}(\max_{0\le t\le T}(B_t + (\tfrac{\alpha}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \le \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{b}{S_0}) \\
&= \mathbf{P}(\max_{0\le t\le T}(B_t + \mu t) \le x)\,,
\end{aligned}$$

gdje je

$$\mu = \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0}.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije maksimuma Brownovog gibanja s driftom dobijemo

$$\mathbf{P}(\max_{0\le t\le T}(B_t + \mu t) \le x) = \Phi\left(\frac{x - \mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x + \mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right).$$