FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 4. svibnja 2023.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Definirajte Brownovo gibanje $B = (B_t,\, t \geq 0)$.

(b) (6 bodova) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Koji su od sljedećih slučajnih procesa Brownova gibanja

(b1) $X_t = 2(B_{t/4+1} - B_1),\ t \geq 0\,,$ (b2) $Y_t = -B_{t+2} - B_2,\ t \geq 0$?

Svoje tvrdnje obrazložite.

(c) (3 boda) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Dokažite da je slučajni proces $\{B_t^2 - t : t \geq 0\}$ martingal obzirom na prirodnu filtraciju za B. Svaki korak detaljno obrazložite.

(d) (4 boda) Neka je $a > 0$ i $\tau = \inf\{t > 0 : |B_t| = a\}$. Odredite razdiobu slučajne varijable B_τ i $\mathbf{E}[\tau]$.

Rješenje.

(a) Slučajni proces $B = \{B_t : t \geq 0\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ s vrijednostima u $\mathbf{R}$ je Brownovo gibanje ako vrijedi

(i) $B_0 = 0$ $\mathbf{P}$-g.s.;

(ii) za sve $n \in \mathbf{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t < n$ su prirasti

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

nezavisne slučajne varijable;

(iii) za sve $0 \leq s \leq t$ prirast $B_t - B_s$ ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$, tj. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$;

(iv) trajektorije slučajnog procesa B su $\mathbf{P}$-g.s. neprekidne funkcije.

(b) (b1) Da. Dovoljno je dokazati da je X gaussovski proces s neprekidnim trajektorijama, funkcijom očekivanja $m(t) = 0$ i kovarijacijskom funkcijom $\gamma(s,t) = s \wedge t$. Neprekidnost trajektorija slijedi iz neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja B. Dokažimo da je X gaussovski. Neka je $n \in \mathbf{N}$ i $0 < t_1 < \ldots < t_n$. Tada je za slučajni vektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ normalan kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora $(B_{t_n/4+1} - B_{t_{n-1}/4+1}, \ldots, B_{t_1/4+1} - B_1)$ koja je dana s

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t_1/4+1} - B_1 \\ B_{t_2/4+1} - B_{t_1/4+1} \\ \vdots \\ B_{t_{n-1}/4+1} - B_{t_{n-2}/4+1} \\ B_{t_n/4+1} - B_{t_{n-1}/4+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_{n-1}} \\ X_{t_n} \end{bmatrix}$$

Funkcija očekivanja je $\mathbf{E}X_t = 2\mathbf{E}[B_{t/4+1} - B_1] = 0$, a kovarijacijska funkcija je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_s X_t] &= 4\mathbf{E}[B_{s/4+1}B_{t/4+1} - B_{s/4+1}B_1 - B_{t/4+1}B_1 + B_1^2] = \\ &= 4[(s/4+1) \wedge (t/4+1) - (s/4+1) \wedge 1 - (t/4+1) \wedge 1 + 1] = s \wedge t\,. \end{aligned}$$

Dakle, XX je Brownovo gibanje.

(b2) Ne, jer je npr.

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(-(B_{t+2} - B_2) - 2B_2) = \mathrm{Var}(-(B_{t+2} - B_2)) + 4\mathrm{Var}(B_2) = t + 2 - 2 + 4 \cdot 2 \neq t.$$

(c) Korištenjem Itôve formule lako slijedi da je

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s$$

odnosno da je promatrani proces Itôv integral, pa samim time i martingal. Alternativno, može se pokazati po definicji gdje je ključni korak pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 - t|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2] + 2B_s\mathbf{E}[B_t - B_s] + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s,\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $B_t - B_s$ nezavisno od $\mathcal{F}_s$ i B_s $\mathcal{F}_s$-izmjerivo.

(d) Vidi Primjer 1.25 s predavanja.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 4. svibnja 2023.

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

(a) (4 boda) Izvedite izraz za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja.

(b) (4 boda) Pokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (B^2_{\frac{j+1}{2^n}} - B^2_{\frac{j}{2^n}})^2 = 4 \int_0^1 B_t^2\, dt.$$

Rješenje.

(a) Vidi Teorem 1.14 s predavanja.

(b) Uočimo da je po definicji lijeva strana izraza jednaka $\langle B^2 \rangle_1$, odnosno kvadratnoj varijaciji procesa B^2 u trenutku 1 (vidimo da je s $\{\frac{j}{2^n} : \; j = 0, \ldots, 2^n\}$ dana jedna subdivizija intervala $[0, 1]$). Lako se pokaže (npr. primjenom Itôve formule) da je B^2 Itôv proces oblika

$$d(B_t^2) = 2B_t dB_t + dt,$$

pa je njegova kvadratna varijacija jednaka kvadratnoj varijaciji Itôvog integrala $2\int_0^t B_s dB_s$, odnosno

$$\langle B^2 \rangle_1 = \int_0^1 (2B_t)^2\, dt.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 4. svibnja 2023.

Zadatak 3. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ i neka je $T > 0$.

(a) (4 boda) Definirajte jednostavni slučajni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ te pripadni Itôv integral u odnosu na Brownovo gibanje BB.

(b) (4 boda) Dokažite da za jednostavni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ vrijedi Itôva izometrija.

(c) (4 boda) Detaljno obrazložite kako se gornja definicija Itôvog integrala proširi na opće integrande, odnosno $\mathbf{F}$-adaptirane slučajne procese $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ za koje je $\mathbf{E}\left[\int_0^T H_t^2\, dt\right] < \infty$.

Rješenje.

(a) Slučajni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ je jednostavan ako je

$$H_t(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(\omega) 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t),\ 0 \leq t \leq T\,,$$

gdje je $n \in \mathbf{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ je particija segmenta $[0, T]$, a ϕ_j su $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerive omeđene slučajne varijable za $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Itôv integral slučajnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B je slučajni proces $(H \bullet B) = \{(H \bullet B)_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$(H \bullet B)_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}})\,,\ 0 \leq t \leq T\,.$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T H_t dB_t\right)^2\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)^2\right] \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{E}[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})]\,.\end{aligned}$$

Za $1 \leq j < k \leq n$ je, zbog nezavisnosti prirasta,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})|\mathcal{F}_{t_{k-1}}]] \\ &= \mathbf{E}[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\underbrace{\mathbf{E}[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}]}_{=\mathbf{E}[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}]=0}] = 0\,.\end{aligned}$$

Zbog simetrije, isto vrijedi za $1 \leq k < j \leq n$. Stoga je

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T H_s dB_s\right)^2\right] &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[\phi_{j-1}^2(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[\phi_{j-1}^2 \underbrace{\mathbf{E}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]}_{=\mathbf{E}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2]=t_j - t_{j-1}}] \\ &= \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}^2(t_j - t_{j-1})\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right]\,.\end{aligned}$$

(c) Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ niz aproksimirajućih jednostavnih integranada iz leme s predavanja, te označimo $I_t^{(n)} = \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Iz leme s predavanja vezane uz egzistenciju aproksimirajućeg niza jednostavno slijedi da je niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $\mathcal{L}^2$, odnosno da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt \le 2\left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2\, dt + \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |H_t^{(m)} - H_t|^2\, dt\right) = 0.$$

Međutim, zbog Itôve izometrije (primijenjene na Iôv integral $((H^{(n)} - H^{(m)})\cdot B)$ koji je zbog linearnosti jednak procesu $I^{(n)} - I^{(m)}$) imamo da je

$$\mathbf{E}\int_0^t |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt = \mathbf{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2]\,,$$

pa je stoga

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = 0\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{1}$$

To znači da je niz Itôvih integrala $(I_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ u trenutku t Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ za sve $t \in [0,T]$. Kako je $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ potpun, slijedi da niz $(I_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira (u L^2)i njegov limes zovemo Itôvim integralom procesa H obzirom na Brownovo gibanje B (u trenutku t) i označavamo $(H\cdot B)_t = I_t = \int_0^t H_u\, dB_u$. Dakle,

$$\int_0^t H_u\, dB_u = (L^2)\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u\,. \tag{2}$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 4. svibnja 2023.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Definirajte Itôv proces.

(b) (3 boda) Zapišite Itôvu formulu za Itôv proces.

(c) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje, $f \in L^2(\mathbf{R})$, te $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Itôv proces definiran s

$$X_t = \int_0^t f(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\, ds,\ t \geq 0.$$

(c1) (2 boda) Odredite $\mathbf{E}[X_t]$ i $\mathrm{Var}(X_t)$.

(c2) (3 boda) Je li slučajni proces $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ definiran s $Y_t = e^{X_t}$ martingal? Svoju tvrdnju dokažite.

(c3) (3 boda) Neka je $f(t) = e^t 1_{[0,100]}(t)$. Odredite čemu je jednak

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{f(\frac{j}{2^n})}(X_{\frac{j+1}{2^n}} - X_{\frac{j}{2^n}})^2.$$

Rješenje.

(a) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$. Slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ je Itôv proces ako postoje $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni procesi $V = \{V_t : t \geq 0\}$ i $H = \{H_t : t \geq 0\}$ takvi da je

$$\int_0^t |V_s|\, ds < \infty\ \mathbf{P}-\text{g.s.} \quad \text{i} \quad \mathbf{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right] < \infty \quad \text{za sve}\ \ t > 0$$

i

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s\, ds + \int_0^t H_s dB_s \quad \text{za}\ \ t \geq 0\,.$$

(b) Ako je $f \in C^2([0,\infty) \times \mathbf{R})$ i X Itôv proces, onda vrijedi

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s\,.$$

(c) (c1) Kako je Itôv integral martingal, vrijedi

$$\mathbf{E}[X_t] = \mathbf{E}\left[\int_0^t f(s)\, dB_s\right] - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\, ds = -\frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\, ds.$$

Nadalje korištenjem Itôve izometrije slijedi

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}\left(\int_0^t f(s)\, dB_s\right) = \mathbf{E}\left[\left(\int_0^t f(s)\, dB_s\right)^2\right] = \int_0^t f(s)^2\, ds.$$

(c2) Koristeći Itôvu formulu dobijemo da je

$$dY_t = Y_t dX_t + \tfrac{1}{2} Y_t d\langle X\rangle_t = Y_t f(t) dB_t,$$

odakle vidimo da je Y Itôv integral, pa samim time i martingal.

(c3) Analogno kao u dokazu Itôve formule, točnije izraza za član (2.33), slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{f(\frac{j}{2^n})} (X_{\frac{j+1}{2^n}} - X_{\frac{j}{2^n}})^2 = \int_0^1 \frac{1}{f(t)} d\langle X\rangle_t = \int_0^1 \frac{1}{f(t)} f^2(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$