FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 1. Promatramo model financijskog tržista s dvije financijske imovine: novac i dionica. Cijena dionice modelira se adaptiranim slučajnim procesom $S = (S_t : t \geq 0)$, a novac se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \geq 0)$, koja je također adaptiran slučajni proces. Neka je $T > 0$ i $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0, T])$ portfelj .

(a) (2 boda) Definirajte samofinancirajući portfelj.

(b) (4 boda) Dokažite da je portfelj ϕ samofinancirajući ako i samo ako diskontirana vrijednost portfelja ϕ, $\widetilde{V}^\phi = (\widetilde{V}_t^\phi : t \in [0, T])$, zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$d\widetilde{V}_t^\phi = \phi_t^1 d\widetilde{S}_t,$$

gdje je $(\widetilde{S}_t : t \in [0, T])$ diskontirana vrijednost dionice.

(c) Neka je $S_t = \alpha t + \sigma B_t$, gdje je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje (u $\mathbf{R}$), $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$. Pretpostavimo da je $r_t = 0$ za sve $t \geq 0$. Provjerite jesu li sljedeći portfelji samofinancirajući:

(c1) (2 boda) $\phi = ((-2S_t^2 + \sigma^2 t, S_t),\ t \in [0, T])$,

(c2) (2 boda) $\phi = \left(\left(\int_0^t S_s\, ds, -t\right),\ t \in [0, T]\right)$.

(d) (2 boda) Iskažite karakterizaciju dostižnog slučajnog zahtjeva C s dospijećem u vremenu T.

Rješenje.

(a) Portfelj ϕ je samofinancirajući ako je adaptiran, vrijedi

$$\int_0^T |\phi_t^0|\, dt + \int_0^T |\phi_t^1|^2\, dt < \infty \quad \mathbf{P} - \text{g.s.}$$

te

$$V_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^0 dR_s + \int_0^t \phi_s^1\, dS_s \quad \mathbf{P} - \text{g.s.},\ 0 \leq t \leq T\,.$$

(b) Propozicija 4.7

(c1) Vrijednost portfelja je

$$V_t^\phi = -2S_t^2 + \sigma^2 t + S_t^2 = -S_t^2 + \sigma^2 t$$

pa iz Itôve formule slijedi da je

$$\begin{aligned} dV_t^\phi &= -2S_t\, dS_t - \frac{1}{2} \cdot 2d\langle S\rangle_t + \sigma^2\, dt = -2S_t\, dS_t - \sigma^2\, dt + \sigma^2\, dt \\ &= -2S_t\, dS_t \neq S_t dS_t = \phi_t^1 dS_t\,. \end{aligned}$$

Kako su diskontni fakto $D_t = 1$ za sve t, iz (b) dijela zadatka slijedi da portfelj nije samofinancirajući.

(c2) Vrijednost portfelja je

$$V_t^\phi = \int_0^t S_s\, ds - tS_t\,.$$

Koristeći Itôvu formulu (za $f(t, x) = tx$) dobivamo

$$\begin{aligned} dV_t^\phi &= S_t\, dt - (S_t\, dt + t\, dS_t + 0) \\ &= -t dS_t = \phi_t^1 dS_t\,. \end{aligned}$$

Dakle, portfelj je samofinancirajući.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 2. Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata α, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$. Vrijednost europske call-opcije s dospijećem $T > 0$ i cijenom izvršenja $K > 0$ u trenutku $0 \le t \le T$ je dana s $c(t, S_t)$, gdje je S_t cijena dionice u trenutku $0 \le t \le T$, a $c \in C^{1,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$.

(a) (3 boda) Napišite Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za $c(t,x)$, te vrijednost od $c(T,x)$.

(b) (3 boda) Napišite formulu za rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe iz (a).

(c) (3 boda) Pretpostavimo da je $\alpha = 0.2, \sigma = 0.3$ i $S_0 = 400$. Godišnja kamatna stopa na tržištu novca je 5 %. Odredite cijenu u $t = 0$ europske call-opcije s dospijećem 15 mjeseci i cijenom izvršenja 410 kn.

(d) (4 boda) Pretpostavimo da na tržištu postoje call i put opcija te forward ugovor s cijenama $c(t, S_t)$, $p(t, S_t)$ i $f(t, S_t)$. Delte call i put opcija su redom -0.5 i 0.6, dok su game redom 0.01 i 0.02. Delta i gama forward ugovora su -0.1 i 0.01. Investitor je upravo prodao 10 put opcija kada je cijena dionice bila 100 kn. Želeći se zaštiti od obveza, želi formirati portfelj koji će se sastojati od call opcija i forward ugovora. Koliko call opcija i forward ugovora investitor treba imati u portfelju tako da on bude delta i gama neutralan?

Rješenje.

(a) Jednadžba (3.5) uz $c(T,x) = (x-K)_+$.

(b) Jednadžba (3.11).

(c) Parametri modela su $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.3$, $S_0 = 400$, $r = 0.05$, $T = \frac{15}{12} = 1.25$ i $K = 410$. Traži se

$$c(0, S_0) = c(0, 400) = 400\Phi(d_+) - 410e^{-0.05\cdot 1.25}\Phi(d_-)\,,$$

gdje su

$$d_+ = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{400}{410} + (0.05 + \frac{0.3^2}{2})1.25}{0.3\sqrt{1.25}} \approx 0.28042$$
$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T} \approx 0.28042 - 0.3\sqrt{1.25} = -0.05499\,.$$

Stoga je $c(0, S_0) \approx 400\,\underbrace{\Phi(0.28)}_{=0.6103} - 410e^{-0.05\cdot 1.25}\,\underbrace{\Phi(-0.05)}_{=1-0.5199} \approx 59.205\,.$

(d) Neka je α broj call opcija i β broj forward ugovora. Vrijednost novog portfelja je tada $g(t, S_t)$, gdje je

$$g(t,x) = -10p(t,x) + \alpha c(t,x) + \beta f(t,x)\,.$$

Vrijednost α i β ćemo dobiti iz uvjete da delta i gama novog portfelja moraju biti jednaki nula:

$$0 = \Delta_g = -10\Delta_p + \alpha\Delta_c + \beta\Delta_{fw}$$
$$0 = \Gamma_g = -10\Gamma_p + \alpha\Gamma_c + \beta\Gamma_{fw}\,,$$

odnosno

$$\begin{aligned} 0 &= -10 \cdot 0.6 - 0.5\alpha - 0.1\beta \\ 0 &= -10 \cdot 0.02 + 0.01\alpha + 0.01\beta\,, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 5\alpha + \beta &= -60 \\ \alpha + \beta &= 20 \end{aligned}$$

s rješenjem $\alpha = -20$ i $\beta = 40$. Dakle, treba prodati 20 call opcija i kupiti 40 forward ugovora.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Iskažite Lévyjevu karakterizaciju Brownovog gibanja.

(b) (3 boda) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $\operatorname{sgn}(x) = 1_{\langle 0,\infty\rangle}(x) - 1_{\langle -\infty,0\rangle}(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Dokažite da je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ definiran s

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s\,,\ \ t \geq 0$$

Brownovo gibanje.

(c) (3 boda) Iskažite Girsanovljev teorem.

(d) (2 boda) Neka je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, $\Theta = (\Theta_t : t \in [0,T])$ $\mathbb{F}$-adaptiran proces i $Z = (Z_t : t \in [0,T])$ proces Radon-Nikodymove derivacije za ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$ iz Girsanovljevog teorema (obzirom na $\mathbf{P}$). Za $0 \leq s \leq t$ odredite

$$\mathbf{E}^*[B_t Z_t^{-1} | \mathcal{F}_s].$$

(e) (4 boda) Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata α, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$. Pomoću Girsanovljevog teorema pronađite ekvivalentnu martingalnu mjeru u ovom modelu (argumentirajte zašto je to martingalna mjera).

Rješenje.

(a) Teorem 4.3.

(b) Koristimo Lévyjevu karakterizaciju Brownovog gibanja: X je martingal kao Itôv integral, $X_0 = 0$ i

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)^2\, d\langle B \rangle_s = \int_0^t ds = t\,.$$

(c) Teorem 4.4.

(d) Kako je $\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{E}[Z_T 1_A]$ za $A \in \mathcal{F}_T$, slijedi da za sve $s \leq t$ i $\mathcal{F}_t$-uzmjerivu slučajnu varijablu Y vrijedi

$$\mathbf{E}^*[Y | \mathcal{F}_s] = Z_s^{-1} \mathbf{E}[Y Z_t | \mathcal{F}_s].$$

Slijedi da je

$$\mathbf{E}^*[B_t Z_t^{-1} | \mathcal{F}_s] = Z_s^{-1} \mathbf{E}[B_t Z_t^{-1} Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s^{-1} \mathbf{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s Z_s^{-1},$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili činjenicu da je B martingal obzirom na $\mathbf{P}$.

(e) U ovom modelu su cijena dionice S_t i vrijednost novca R_t modelirane s

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha S_t\,dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0 \\ dR_t &= rR_t\,dt, \quad R_0 = 1 \qquad (\text{tj.} \quad R_t = e^{rt})\,. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}dS_t = -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}(\alpha S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t) \\ &= (\alpha - r)\tilde{S}_t\,dt + \sigma\tilde{S}_t\,dB_t = \sigma\tilde{S}_t\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\,dt + dB_t\right)\,. \end{aligned}$$

Koristeći Girsanovljev teorem s

$$\theta_t = \frac{\alpha - r}{\sigma}, \quad 0 \le t \le T$$

dobije se da je uz

$$Z_t = e^{-\frac{\alpha-r}{\sigma}B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-r}{\sigma}\right)^2 t}$$

slučajni proces

$$B_t^\star = B_t + \int_0^t \theta_s\,ds = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma}t, \quad 0 \le t \le T$$

Brownovo gibanje u odnosu na vjerojatnosnu mjeru

$$\mathbf{P}^\star(A) = \mathbf{E}[Z_T 1_A] = \int_A e^{-\frac{\alpha-r}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-r}{\sigma}\right)^2 T}\,d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}_T\,.$$

Tada je

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \sigma\int_0^t \tilde{S}_s\,dB_s^\star, \quad 0 \le t \le T$$

pa je $\{\tilde{S}_t : 0 \le t \le T\}$ $\mathbf{P}^\star$-martingal kao Itôv integral, čime smo pronašli ekvivalentnu martingalnu mjeru.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Izračunajte $\mathrm{Var}X$, gdje je $X = \max\limits_{0\leq t\leq 1} B_t$.

(b) Cijena dionice modelirana je geometrijskim Brownovim gibanjem s parametrima $\alpha = 0.1$ i $\sigma = 0.2$. Početna cijena dionice je 300 kn, a kamatna stopa je 5%.

(b1) (4 boda) Izračunajte vjerojatnost da unutar pola godine cijena dionice neće pasti ispod 280 kn.

(b2) (4 boda) Odredite cijenu down-and-out opcije s cijenom izvršenja 100 kn, barijerom 280 kn i dospijećem 9 mjeseci.

Napomena: Za $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i $\mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbf{P}(\max_{0\leq s\leq t}(B_s + \mu s) \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x+\mu t}{\sqrt{t}}\right),\ x > 0$$

$$\mathbf{P}(\min_{0\leq s\leq t}(B_s + \mu s) \geq x) = \Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{x+\mu t}{\sqrt{t}}\right),\ x < 0.$$

Rješenje.

(a) Vrijedi $X \stackrel{d}{=} |B_1|$ pa je $\mathrm{Var}X = \mathbf{E}B_1^2 - (\mathbf{E}|B_1|)^2$. Računamo

$$\mathbf{E}|B_1| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = 2\int_0^{\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Dakle, $\mathrm{Var}X = 1 - \frac{2}{\pi}$.

(b1) Tražimo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\min_{0\leq t\leq 0.5} S_t \geq 280) &= \mathbf{P}(\min_{0\leq t\leq 0.5} S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t} \geq 280) \\ &= \mathbf{P}(\min_{0\leq t\leq 0.5}(B_t + (\tfrac{\alpha}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \geq \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{280}{S_0}) \\ &= \mathbf{P}(\min_{0\leq t\leq 0.5}(B_t + \mu t) \geq x),\end{aligned}$$

gdje je

$$\mu = \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{280}{S_0} = 5\ln\frac{280}{300} = 5\ln\frac{14}{15}.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije minimuma Brownovog gibanja s driftom dobijemo

$$\mathbf{P}(\min_{0\leq t\leq 0.5}(B_t + \mu t) \geq x) = \Phi\left(\frac{-x + \mu\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{x+\mu\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)$$

pa je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\min_{0\leq t\leq 0.5} S_t \geq 280) &= \Phi\left(\frac{-5\ln\frac{14}{15} + 0.4\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right) - e^{2\cdot 0.4\cdot 5\ln\frac{14}{15}}\Phi\left(\frac{5\ln\frac{14}{15} + 0.4\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right) \\ &\approx \underbrace{\Phi(0.77)}_{=0.7794} - \left(\frac{14}{15}\right)^4 \underbrace{\Phi(-0.20)}_{=1-0.5793} = 0.4602.\end{aligned}$$

(b2) Traži se cijena slučajnog zahtjeva

$$C = K \cdot 1_{\{\min\limits_{0\le t\le T} S_t \ge b\}}\,,$$

gdje je $K = 100$, $b = 280$ i $T = \frac{9}{12} = 0.75$. Neka je $\mathbf{P}^\star$ ekvivalentna martingalna mjera uz koju je

$$B_t^\star = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma}$$

Brownovo gibanje. Tada je cijena slučajnog zahtjeva C dana s

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbf{E}^\star[e^{-rT}C] = \mathbf{E}^\star[Ke^{-rT}1_{\{\min\limits_{0\le t\le T} S_t\ge b\}}] \\ &= Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\min_{0\le t\le T} S_t \ge b) = Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\min_{0\le t\le T}(B_t^\star + (\tfrac{r}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \ge \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{b}{S_0}) \\ &= Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\min_{0\le t\le T}(B_t^\star + \mu t) \ge x)\,, \end{aligned}$$

gdje je

$$\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20} = 0.15 \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} = 5\ln\frac{280}{300} = 5\ln\frac{14}{15}\,.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije minimuma Brownovog gibanja s driftom dobije se

$$\mathbf{P}^\star(\min_{0\le t\le T}(B_t^\star + \mu t) \ge x) = \Phi\left(\frac{-x + \mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{x + \mu\cdot T}{\sqrt{0.5}}\right)\,.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} V_0 &= 100e^{-0.05\cdot 0.75}\left[\Phi\left(\frac{-5\ln\frac{14}{15} + 0.15\cdot 0.75}{\sqrt{0.75}}\right) - e^{2\cdot 0.15\cdot 5\ln\frac{14}{15}}\Phi\left(\frac{5\ln\frac{14}{15} + 0.15\cdot 0.75}{\sqrt{0.75}}\right)\right] \\ &\approx 96.31944\left[\underbrace{\Phi(0.53)}_{=0.7019} - \left(\frac{14}{15}\right)^{1.5}\underbrace{\Phi(-0.27)}_{=1-0.6064}\right] = 33.42251\,. \end{aligned}$$