FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Definirajte Brownovo gibanje $B = (B_t,\, t \geq 0)$.

(b) (5 bodova) Neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Jesu li slučajni procesi $X = (X_t,\, t \geq 0)$, $Y = (Y_t,\, t \geq 0)$

$$X_t = (t+1)B_{\frac{t}{t+1}} - tB_1, \quad Y_t = \frac{1}{\sqrt{t}} B_{t^2}$$

također Brownova gibanja? Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

(c) (2 boda) Je li Brownovo gibanje slučajan proces konačne varijacije? Svoju tvrdnju obrazložite.

(d) (4 boda) Za Brownovo gibanje $B = (B_t,\, t \geq 0)$ i subdiviziju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1\}$ intervala $[0, 1]$ definiramo

$$Q_\Pi^* = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})(B_{t_i^*} - B_{t_i}),$$

gdje je $t_i^* = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$. Odredite $(\mathbf{P}) \lim\limits_{||\Pi|| \to 0} Q_\Pi^*$.

Rješenje.

(a) Definicija 1.4

(b) Proces X je Brownovo gibanje i to ćemo pokazati korištenjem karakterizacije iz Teorema 1.5. Uočimo prvo da je, kao kompozicija g.s. neprekisnih funkcija, funkcija $t \mapsto X_t$ g.s. neprekidna te je $X_0 = B_0 = 0$. Nadalje, za $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ slučajni vektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ je oblika

$$\begin{bmatrix} X_{t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1+1 & 0 & \cdots & 0 & -t_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & t_n+1 & -t_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{\frac{t_1}{t_1+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{\frac{t_n}{t_n+1}} \\ B_1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $(B_{\frac{t_1}{t_1+1}}, \ldots, B_{\frac{t_n}{t_n+1}}, B_1)$ normalan slučajni vektor, slijedi da je i vektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ normalno distribuiran. Ostaje pokazati $\mathbf{E}[X_t X_s] = s \wedge t$. Za $s < t$ imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_t X_s] &= (t+1)(s+1)\mathbf{E}[B_{\frac{t}{t+1}} B_{\frac{s}{s+1}}] - s(t+1)\mathbf{E}[B_{\frac{t}{t+1}} B_1] - t(s+1)\mathbf{E}[B_{\frac{s}{s+1}} B_1] + st\mathbf{E}[B_1^2] \\ &= (t+1)(s+1)\frac{s}{s+1} - s(t+1)\frac{t}{t+1} - t(s+1)\frac{s}{s+1} + st = s. \end{aligned}$$

Proces Y nije Brownovo gibanje jer za $s < t$ je $\mathbf{E}[Y_s Y_t] = \frac{1}{\sqrt{ts}}\mathbf{E}[B_{t^2} B_{s^2}] = \sqrt{\frac{s^3}{t}} \neq s$.

(c) Brownovo gibanje je slučajni proces beskonačne varijacije, jer martingal s g.s. neprekidnim trajektorijama, a po Propoziciji 1.10. neprekidni martingal je konačne varijacije ako i samo ako je konstantan.

(d) Kao i u računu kvadratne varijacije za Brownovo gibanje, pokazat ćemo da Q^*_Π konvergira u L^2. Kako je, zbog nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja

$$\mathbf{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})(B_{t_i^*} - B_{t_i})] = \mathbf{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*}]\mathbf{E}[B_{t_i^*} - B_{t_i}] = 0,$$

po linearnosti očekivanja slijedi $\mathbf{E}[Q^*_\Pi] = 0$. Nadalje,

$$(Q^*_\Pi)^2 = \sum_{i,j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})(B_{t_i^*} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j^*})(B_{t_j^*} - B_{t_j}).$$

Kao i prije, iz nezavisnosti prirasta slijedi za $i \neq j$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})(B_{t_i^*} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j^*})(B_{t_j^*} - B_{t_j})]\\ =&\mathbf{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*}]\mathbf{E}[B_{t_i^*} - B_{t_i}]\mathbf{E}[B_{t_{j+1}} - B_{t_j^*}]\mathbf{E}[B_{t_j^*} - B_{t_j}] = 0,\end{aligned}$$

odnosno za $i = j$

$$\mathbf{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})^2(B_{t_i^*} - B_{t_i})^2] = \mathbf{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})^2]\mathbf{E}[(B_{t_i^*} - B_{t_i})^2] = (t_{i+1} - t_i^*)(t_i^* - t_i).$$

Stoga po linearnosti očekivanja, uvrštavanjem $t_i^* = \frac{t_{i+1} - t_i}{2}$ dobivamo

$$\mathbf{E}[(Q^*_\Pi)^2] = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i^*)(t_i^* - t_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)^2 \leq \frac{||\Pi||}{4}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = \frac{||\Pi||}{4} \xrightarrow{||\Pi|| \to 0} 0.$$

Slijedi $Q^*_\Pi \xrightarrow{(\mathbf{P})} 0$, kada $||\Pi|| \to 0$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

(a) (4 boda) Dokažite da je za $\sigma > 0$ slučajni proces $Z = (Z_t,\, t \geq 0)$ definiran s

$$Z_t = e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t},\; t \geq 0$$

martingal obzirom na Brownovsku filtraciju.

(b) (4 boda) Neka je $\tau_x = \inf\{t > 0 : B_t \geq x\}$ prvo vrijeme prelaska iznas/ispod razine $x \in \mathbf{R}$. Korištenjem tvrdnje pod (a) dokažite da je

$$\mathbf{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \tau_x}\right] = e^{-\sigma x},\; x \in \mathbf{R}.$$

(c) (4 boda) Neka je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Čemu je jednaka distribucija slučajna varijable $I_t = \int_0^t f(s) dB_s$? Odredite razdiobu slučajne varijable $e^{-1} B_1 + \int_0^1 e^{-s} B_s \, ds$.

Rješenje.

(a) Proces Z je očito adaptiran, te je zbog $B_t \sim N(0,t)$, $\mathbf{E}[\exp\{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{t}\}] = 1$. Za $0 \leq s \leq t$ je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}\left[\exp\{\sigma(B_t - B_s)\} \cdot \exp\left\{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \Big|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\overset{B_s\, \mathcal{F}_s-\text{izmj}}{=} \exp\left\{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \mathbf{E}\left[\exp\{\sigma(B_t - B_s)\} | \mathcal{F}_s\right] \\
&\overset{B_t - B_s \text{ nez od } \mathcal{F}_s}{=} \exp\left\{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \mathbf{E}[\exp\{\sigma(B_t - B_s)\}] \\
&\overset{B_t - B_s \sim N(0, t-s)}{=} \exp\{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\} = Z_s.
\end{aligned}$$

(b) Račun nakon Teorema 1.24

(c) Po Teoremu 2.24 je $I_t \sim N(0, \int_0^t f^2(s)\, ds)$. Uočimo da po Itôvoj formuli za $f(t,x) = e^{-t}x$ ($f_x(t,x) = e^{-t}$, $f_{xx}(t,x) = 0$, $f_t(t,x) = -e^{-t}x$) imamo,

$$e^{-t} B_t = \int_0^t e^{-s} dB_s - \int_0^t e^{-s} B_s \, ds.$$

Stoga je

$$e^{-1} B_1 + \int_0^1 e^{-s} B_s \, ds = \int_0^1 e^{-s} dB_s \sim N\left(0, \int_0^1 e^{-2s} ds = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\right).$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 3. Neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

(a) (2 boda) Definirajte jednostavni proces i Itôv integral jednostavnog procesa obzirom na Brownovo gibanje.

(b) (4 boda) Detaljno obrazložite kako se gornja definicija Itôvog integrala proširi na opće integrande (iz prostora $\mathcal{L}^2_{\text{ad}}$).

(c) (3 boda) Dokažite da je Itôv integral jednostavnog procesa obzirom na Brownovo gibanje martingal obzirm na Brownovsku filtraciju.

(d) (4 boda) Odredite varijancu slučajne varijable $X = (L^2) \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} e^{B_{\frac{j}{n}}}(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}})$. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Rješenje.

(a) Definicije 2.1 i 2.2

(b) Konstrukcija nakon Leme 2.9

(c) Teorem 2.4

(d) Uočimo da je po Propoziciji 2.15

$$(L^2) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} e^{B_{\frac{j}{n}}}(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}}) = \int_0^1 e^{B_s} dB_s,$$

pri čemu smo propoziciju mogli primijeniti jer je funkcija

$$(t, s) \mapsto \mathbf{E}[e^{B_t} e^{B_s}] = \mathbf{E}[e^{B_t - B_s}]\mathbf{E}[e^{2B_s}] = e^{\frac{1}{2}(t-s)} e^{2s} = e^{\frac{1}{2}(t+3s)}$$

neprekidna (vidi Napomenu 2.6). Također $(e^{B_t}, t \geq 0) \in \mathcal{L}^2_{\text{ad}}([0,1])$ jer je

$$\mathbf{E}\int_0^1 e^{2B_s}\, ds = \int_0^1 \mathbf{E}[e^{2B_s}]\, ds = \int_0^1 e^{2s}\, ds = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Kako je $\int_0^t e^{B_s} dB_s$ Itôv integral, pa s toga i martingal, slijedi da je $\mathbf{E}[X] = 0$ i po Itôvoj izometriji je

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}\int_0^1 e^{2B_s}\, ds = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Definirajte Itôv proces.

(b) (3 boda) Zapišite Itôvu formulu za Itôv proces.

(c) (2 boda) Definirajte generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje $S = (S_t, t \geq 0)$.

(d) (2 boda) Čemu je jednaka kvadratna varijacija procesa $(\ln S_t, t \geq 0)$?

(e) (3 boda) Dokažite da generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje S zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_t = \alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t.$$

Rješenje.

(a) Definicija 2.20.

(b) Formula (2.28) ili (2.29)

(c) Primjer 2.23

(d) Primjer 2.23

(e) Primjer 2.23