FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Provjera znanja – 18. lipnja 2020.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Definirajte Brownovo gibanje $B = (B_t : t \geq 0)$.

(b) (6 bodova) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $t_0 > 0$. Ispitajte je li slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$,

$$X_t = \begin{cases} B_t, & t \leq t_0 \\ 2B_{t_0} - B_t, & t > t_0 \end{cases},$$

također Brownovo gibanje. Dovoljno je sve tvrdnje koje ovise o $n \in \mathbb{N}$ dokazati za specijalni slučaj $n = 2$.

(c) (3 boda) Definirajte kvadratnu varijaciju $\langle X \rangle_t$ slučajnog procesa $X = (X_t : t \geq 0)$.

(d) (6 bodova) Izvedite izraz za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja.

(e) (6 bodova) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, $a \in \mathbb{R}$ i $X_t = e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t}$. Dokažite da je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ martingal.

Napomena: Neka je $Y \sim N(0, \sigma^2)$. Tada je $\mathbb{E}[Y^4] = 3\sigma^4$ i $\mathbb{E}[e^{aY}] = e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}$.

Rješenje.

(a) Slučajni proces $B = (B_t, t \geq 0)$ je *Brownovo gibanje* ako vrijedi:

(i) Putovi $t \mapsto B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).

(ii) $B_0 = 0$.

(iii) Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.

(iv) Za sve $0 \leq s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.

(b) Proces X je Brownovo gibanje. Pokažimo direktno korištenjem definicije. Po definiciji je $X_0 = 0$. Proces X ima neprekidne trajektorije g.s. za $t < t_0$ (jer je B Brownovo gibanje) i $t > t_0$ (B je Brownovo gibanje i preslikavanje $x \mapsto 2B_{t_0}(\omega) - x$ je neprekidno za svaki $\omega \in \Omega$). Kako je

$$\lim_{t \downarrow t_0} X_t = B_{t_0} = X_{t_0},$$

g.s. neprekidnost trajektorija od X slijedi iz g.s. neprekidnosti trajektorija od B. Nadalje, za $t \leq t_0$ je $X_t = B_t \sim N(0, t)$, a za $t > t_0$ je $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ (linearna kombinacija normalnih slučajnih varijabli), gdje je

$$\begin{aligned} \mu &= 2\mathbb{E}[B_{t_0}] - \mathbb{E}[B_t] = 0 \\ \sigma^2 &= \mathrm{Var}(B_{t_0} - B_t + B_{t_0}) \overset{\text{nez. prirasta}}{=} \mathrm{Var}(B_{t_0} - B_t) + \mathrm{Var}(B_{t_0}) \overset{t \geq t_0}{=} t - t_0 + t_0 = t \end{aligned}$$

Konačno, neka je $m \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_1 < \cdots < t_m$. Ako je $t_m \leq t_0$ nezavisnost prirasta od X slijedi iz nezavisnosti prirasta od B. Pretpostavimo sada da je $t_m > t_0$ i neka je $t_k \leq t_0$ a $t_{k+1} > t_0$. Tada je (uz $t_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
X_{t_i} - X_{t_{i-1}} &= B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, \ i \leq k \\
X_{t_{k+1}} - X_{t_k} &= 2B_{t_0} - B_{t_{k+1}} - B_{t_k} = -(B_{t_{k+1}} - B_{t_0}) + (B_{t_0} - B_{t_k}) \\
X_{t_i} - X_{t_{i-1}} &= -(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}), \ k+1 < i \leq m.
\end{aligned}$$

Kako su prirasti $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, B_{t_0} - B_{t_k}, B_{t_{k+1}} - B_{t_0}, B_{t_{k+2}} - B_{t_{k+1}}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ nezavisni, slijedi nezavisnost prirasta $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$.

Tvrdnja (b) se slično može provjeriti i korištenjem karakterizacije Brownovog gibanja kao Gaussovskog procesa.

(c) Neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ particija intervala $[0,T]$ i $||\Pi|| = \max\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1, ..., n\}$. Označimo $Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|^2$. *Kvadratna varijacija* od X na intervalu $[0,T]$ definira se kao

$$\langle X \rangle_T := (\mathbb{P}) \lim_{||\Pi|| \to 0} Q_\Pi \,.$$

(d) Neka je $B = (B_t, \, t \geq 0)$ je Brownovo gibanje. Iz linearnosti očekivanja i $B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$ slijedi da je

$$\mathbb{E}[Q_\Pi] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T.$$

S druge strane

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4\right] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right] + (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&= 2(t_{j+1} - t_j)^2
\end{aligned}$$

Sada zbog nezavisnosti prirasta imamo da je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Q_\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Var}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right] = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2||\Pi||(t_{j+1} - t_j) = 2||\Pi|| \, T \,.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\lim_{||\Pi|| \to 0} \mathbb{E}[(Q_\Pi - T)^2] = \lim_{||\Pi|| \to 0} \operatorname{Var}(Q_\Pi) = 0$ pa specijalno $Q_\Pi \xrightarrow{(\mathbb{P})} T$.

(e) Vidi Teorem 1.27.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Provjera znanja – 18. lipnja 2020.

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje.

(a) (6 bodova) Definirajte jednostavan slučajni proces $H = (H_t : 0 \leq t \leq T)$ i Itôv integral $I_t = \int_0^t H_s dB_s$.

(b) (5 bodova) Odredite varijancu slučajne varijable $Z = \int_0^1 B_t^2 dB_t$.

(c) (4 bodova) Definirajte Itôv proces.

(d) (4 bodova) Korištenjem Itôvog diferencijalnog računa odredite kvadratnu varijaciju Itôvog procesa.

(e) (6 bodova) Neka je $X_t = (t + B_t)^2$. Pokažite da je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces.

Rješenje.

(a) Definicija 2.1 i Definicija 2.2

(b) Itôv integral $I = (\int_0^T B_t^2 dB_t)_{T\geq 0}$ je martingal pa je $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}[I_1] = \mathbb{E}[I_0] = 0$. Iz Itôve izometrije slijedi da je

$$\operatorname{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[I_1^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 B_t^4 dt\right] \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \mathbb{E}[B_t^4] dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

(c) Definicija 2.18

(d) Napomena 2.19(b)

(e) Koristimo Itôvu formulu za Brownovo gibanje B i funkciju $f(t,x) = (t+x)^2$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} dX_t = df(t, B_t) &= f_x(t, B_t)dB_t + f_t(t, B_t)dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t)dB_t dB_t \\ &= 2(t + B_t)dB_t + (2t + 2B_t + 1)dt =: H_t dB_t + V_t dt. \end{aligned}$$

Kako je

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t 4(s + B_s)^2 ds\right] = \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 < \infty$$

slijedi da je $H \in \mathcal{L}_{ad}^2$. Nadalje, kako su trajektorije Brownovog gibanja g.s. neprekidne na $[0,t]$, slijedi da je $\int_0^t |V_t| dt < \infty$ g.s.. Slijedi da je X Itôv proces.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Provjera znanja – 18. lipnja 2020.

Zadatak 3.

(a) Cijena $S = (S_t : t \geq 0)$ dionice u Black-Scholes-Mertonovom modelu dana je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dS_t = \alpha S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \, ,$$

gdje su $\alpha > 0$ i $\sigma > 0$ konstantni parametri, a $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kamatna stopa na tržištu novca je $r > 0$.

(a1) (5 bodova) Napišite stohastičku diferencijalnu jednadžbu za vrijednost $X = (X_t : t \geq 0)$ portfelja koji u trenutku t ima Δ_t jedinica dionice.

(a2) (8 bodova) Neka je X_t vrijednost replicirajućeg portfelja call opcije $c(t, S_t)$ u trenutku t. Dokažite da je $\Delta_t = c_x(t, S_t)$.

(a3) (4 boda) Napišite izraz za $c(t, x)$.

(b) (8 bodova) Investitor je prodao 10 put opcija na dionicu. Delta put opcije jednak je -0.6, a gama je jednak 0.05. Investitor se želi zaštititi od proizašlih obveza i to tako da formira portfelj koji će biti i delta i gama neutralan. Na tržištu postoji call opcija na dionicu kojoj je delta jednak 0.4, a gama 0.02. Odredite koliko dionica te koliko call opcija investitor treba imati u portfelju da bi portfelj bio delta i gama neutralan?

Napomena: Funkcija $g \in C^{1,2}(\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle)$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu ako vrijedi

$$rg(t, x) = g_t(t, x) + rxg_x(t, x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 g_{xx}(t, x), \;\; t, x \geq 0.$$

Rješenje.

(a) Vidi relaciju (3.2), Propoziciju 3.2 i formulu (3.11)

(b) Neka su $p(t, S_t)$, $c(t, S_t)$ i S_t redom vrijednosti put opcije, call opcije i dionice u trenutku t. Želimo odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ t.d.

$$10p(t, S_t) = ac(t, S_t) + bS_t \text{ (g.s.), odnosno } 10p(t, x) = ac(t, x) + bx, \;\forall x.$$

Kako je

$$10p_x(t, x) = ac_x(t, x) + b \text{ i } 10p_{xx}(t, x) = ac_{xx}(t, x),$$

dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -6 &= 0.4a + b \\ 0.5 &= 0.02a, \end{aligned}$$

odnosno $a = 25$ i $b = -16$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Provjera znanja – 18. lipnja 2020.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Iskažite Lévyjevu karakterizaciju Brownovog gibanja.

(b) (4 boda) Iskažite Girsanovljev teorem.

(c) (5 bodova) Dokažite da su procesi $Z = (Z_t : t \in [0,T])$ i $B^*Z = (B_t^* Z_t : t \in [0,T])$ iz Girsanovljevog teorema martingali s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}$.

(d) (5 bodova) Dokažite da je mjera $\mathbb{P}^*$ iz Girsanovljevog teorema vjerojatnosna mjera (na istom izmjerivom prostoru kao i $\mathbb{P}$), te da je ekvivalentna s $\mathbb{P}$.

(e) (7 bodova) Nalazimo se u Black-Scholes-Mertonovom modelu s parametrima $\alpha = 0.04$, $\sigma = 0.16$, $r = 0.03$ i $S_0 = 300$. Odredite cijenu binarne *up-and-in* opcije s cijenom izvršenja $K = 30$, dospijećem 3 mjeseca i barijerom $b = 320$, odnosno $C = 30 \cdot 1_{\{\max\{S_t : t \in [0,3/12]\} > 320\}}$.

Napomena: $\mathbb{P}\left(\max_{0 \le t \le T}(B_t + \mu t) \le x\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sqrt{T}}\right)$, $x > 0$.

Rješenje.

(a) Teorem 4.4

(b-d) Teorem 4.5

(e) Cijenu opcije određujemo korištenjem ekvivalentne martingalne mjere $\mathbb{P}^*$ i Girsanovljevog teorema, točnije činjenice da je B^* $\mathbb{P}^*$-Brownovo gibanje.

$$\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{E}^*[e^{-0.03 \cdot 3/12} 30 \cdot 1_{\{\max\{S_t : t \in [0,3/12]\} > 320\}}] \\
&= 30 e^{-0.03 \cdot 3/12} \mathbb{P}^* \left(\max_{t \in [0,3/12]} S_0 \exp\{\sigma B_t + (\alpha - \sigma^2/2)t\} > 320 \right) \\
&= 30 e^{-0.03 \cdot 3/12} \mathbb{P}^* \left(\max_{t \in [0,3/12]} \{B_t^* + (r/\sigma - \sigma/2)t\} > \frac{1}{0.16} \ln \frac{320}{300} \right).
\end{aligned}$$

Rješenje sada dobivamo primjenom formule iz napomene (na B^* i $\mathbb{P}^*$) uz $\mu = r/\sigma - \sigma/2$, $T = 3/12$ i $x = \frac{1}{0.16} \ln \frac{320}{300}$.