FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2019.

Zadatak 1. Neka je $S = (S_t : t \geq 0)$ cijena dionice u generaliziranom Black-Scholes-Mertonovom modelu, gdje su srednja stopa povrata $\alpha = (\alpha_t : t \geq 0)$, volatilnost $\sigma = (\sigma_t : t \geq 0)$ i kamatna stopa $r = (r_t : t \geq 0)$ pozitivni adaptirani slučajni procesi.

(a) (3 boda) Izvedite stohastičku diferencijalnu jednadžbu za diskontiranu cijenu dionice $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t : t \geq 0)$.

(b) (2 boda) Definirajte samofinancirajući portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0,T])$, $T > 0$.

(c) (4 boda) Neka je $(g(t, S_t) : t \in [0,T])$, cijena neke opcije s dospijećem $T > 0$, pri čemu $g \in C^{1,2}((0,T) \times (0,\infty))$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu diferencijalnu jednadžbu. Odredite jedan replicirajući portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0,T])$ za tu opciju i dokažite da je riječ o replicirajućem portfelju.

(d) (4 boda) Neka je $S_0 = 100$. Odredite samofinancirajući portfelj ϕ ako je $\phi_t^1 = \frac{1}{2}$ i početna vrijednost portfelja $V_0^\phi = 30$.

Rješenje.

(a) Neka je $D_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$ i $\widetilde{S}_t = D_t S_t$. Korištenjem Itove formule dobivamo

$$d\widetilde{S}_t = -r_t D_t S_t dt + D_t dS_t + dD_t \cdot dS_t = -r_t D_t S_t dt + \alpha_t D_t S_t dt + \sigma_t D_t S_t dB_t = (\alpha_t - r_t)\widetilde{S}_t dt + \sigma_t \widetilde{S}_t dB_t$$

(b) Adaptirani slučajni proces ϕ je samofinancirajući portfelj ako je

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T |\phi_t^1|^2 dt < \infty$$

i vrijednost portfelja V_t^ϕ zadovoljava SDJ-u

$$dV_t^\phi = \phi_t^0 dR_t + \phi_t^1 dS_t.$$

(c) Pokažimo da je portfelj $\phi = ((R_t^{-1}(g(t,S_t) - \frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)S_t), \frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)) : t \in [0,T])$ samofinancirajući. Kako je $V_t^\phi = \phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t$ slijedi da je

$$\begin{aligned}
dV_t^\phi &= dg(t,S_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,S_t)\sigma_t^2 S_t^2 dt \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\right)dt - rS_t\frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)dt + \sigma S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)dB_t \\
&\overset{BSMjdba}{=} rg(t,S_t) - rS_t\frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)dt + \sigma S_t\frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)dB_t \\
&= re^{rt}\phi_t^0 dt + \phi_t^1 dS_t = \phi_t^0 dR_t + \phi_t^1 dS_t
\end{aligned}$$

(d) Po karakterizaciji samofinancirajućeg portfelja vrijedi

$$\widetilde{V}_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_t^1 d\widetilde{S}_t = 30 + \frac{1}{2}(\widetilde{S}_t - S_0) = D_t(-20R_t + \frac{1}{2}S_t) = D_t(\phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t)$$

pa slijedi da je $\phi_t^0 = -20$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2019.

Zadatak 2. Promatramo Black-Scholes-Mertonov model financijskog tržišta s fiksnim parametrima $\alpha, r, \sigma, S_0 > 0$.

(a) (3 boda) Zapišite cijenu europske call opcije s cijenom izvršenja K i dospijećem $T > 0$ te odredite cijenu pripadne europske put opcije.

(b) (3 boda) Odredite deltu call opcije iz (a) dijela.

(c) (3 boda) Neka je $\alpha = 0.15$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$ i $S_0 = 200$. Portfelj se sastoji od 2.5 jedinica call opcije s cijenom izvršenja 205 i dospijećem 4 mjeseca. Izračunajte koliko jedinica dionice moramo dodati/oduzeti tom portfelju da bi on postao Δ-neutralan u trenutku $t = 0$.

(d) (3 boda) Obrazložite što znači da je portfelj Δ-neutralan i Γ-neutralan.

Rješenje.

(a) Cijena europske call opcije u trenutku t jednaka je $c(t, S_t)$ gdje je

$$c(t,x) = x\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-), \quad d_\pm = \frac{\ln\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Neka je $g(t, S_t)$ cijena forwad ugovora, odnosno $p(t, S_t)$ cijena europske put opcije u trenutku t. Iz call-put pariteta slijedi

$$p(t,x) = c(t,x) - g(t,x) = x\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-) - \left(x - Ke^{-r(T-t)}\right) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_-) - x\Phi(-d_+).$$

(b) $\Delta = \frac{\partial c}{\partial x}(t, S_t) = \Phi(d_+) + xf_{N(0,1)}(d_+)\frac{\partial d_+}{\partial x} - Ke^{-r(T-t)}f_{N(0,1)}(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial x} = \Phi(d_+)$

(c) Dodajmo z jedinica dionice u portfelj, tada je cijena portfelja dana s $\xi(t, S_t)$ gdje je

$$\xi(t,x) = 2.5c(t,x) + zx.$$

Kako je portfelj Δ-neutralan, iz (b) dijela slijedi da je

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, S_t) = 2.5\Phi(d_+) + z \ \Rightarrow z = -2.5\Phi(d_+).$$

U trenutku $t = 0$ je $d_+ = \frac{\ln\frac{200}{205} + \left(0.05 \pm \frac{0.2^2}{2}\right)\frac{4}{12}}{0.2\sqrt{\frac{4}{12}}} = -0.01177$ pa je $z = -2.5\Phi(-0.01177)$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2019.

Zadatak 3.

(a) (4 boda) Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ neprekidni martingal na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ takav da je $M_0 = 0$ i $\langle M \rangle_t = t$. Dokažite da je M Brownovo gibanje.
Napomena: Dovoljno je pokazati nezavisnost dvaju prirasta.

(b) (3 boda) Iskažite Girsanovljev teorem.

(c) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $\alpha = (\alpha_t : t \geq 0)$ adaptiran proces obzirom na Brownovsku filtraciju. Dan je Bachelierov model financijskog tržišta, gdje je diskontirana cijena dionice modelirana s

$$d\widetilde{S}_t = \alpha_t dt + \sigma dB_t,$$

za parametar $\sigma > 0$, početnu cijenu dionice $S_0 > 0$ i kamatnu stopu $r \geq 0$.

(c1) (3 boda) Odredite ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ i dokažite da je to vjerojatnosna mjera ekvivalentna s $\mathbb{P}$.

(c2) (3 boda) Odredite cijenu put opcije s cijenom izvršenja K i vremenom dospijeća T.

Rješenje.

(a) Vidi predavanja.

(b) Vidi predavanja.

(c1) Definiramo proces $\theta = (\theta_t : t \in [0, T])$ s $\theta_t = \frac{\alpha_t}{\sigma}$,

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[Z_T 1_A], \quad A \in \mathcal{F}_T, \quad Z_T = e^{-\int_0^T \theta_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt}.$$

Tada je po Girsanovljevom teoremu, $\widetilde{S}$ je $\mathbb{P}^*$-martingal, jer je

$$d\widetilde{S}_t = \sigma(\theta_t dt + dB_t).$$

Za dokaz da je $\mathbb{P}^*$ vjerojatnosna mjera ekvivalentna s $\mathbb{P}$, pogledajte predavanja.

(c2) Korištenjem (c1) dijela slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[e^{-rT}(K - S_T)_+] &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}(K - S_0 - e^{rT}\int_0^T \alpha_t dt - e^{rT}\sigma B_T)_+] = \mathbb{E}^*[(e^{-rT}K - S_0 - \sigma B_T^*)_+] \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}(e^{-rT}K - S_0)} (e^{-rT}K - S_0 - \sigma x)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} \\
&= (Ke^{-rT} - S_0)\Phi(d) - \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}, \quad d = \frac{Ke^{-rT} - S_0}{\sigma\sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2019.

Zadatak 4. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) (4 boda) Korištenjem principa refleksije odredite funkciju gustoće slučajne varijable $m_t = \min_{s\in(0,t)} B_s$.

(b) Nalazimo se u Black-Scholes-Mertonovom modelu s parametrima $\alpha = 0.15$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$ i $S_0 = 200$.

(b1) (4 boda) Odredite cijenu binarne *down-and-in* opcije s cijenom izvršenja $K = 150$, dospijećem 4 mjeseca i barijerom $b = 160$.

(b2) (4 boda) Izračunajte vjerojatnost da opcija pod $(b1)$ bude aktivirana i isplaćena.

Napomena: $\mathbb{P}\left(\min_{s\in[0,t]}(B_s + \mu s) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{x+\mu t}{\sqrt{t}}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Rješenje.

(a) Neka je $T_x = \inf t \geq 0 : B_t \leq x$ i neka je

$$W_t = \begin{cases} B_{T_x} - (B_t - B_{T_x}), & t > T_x \\ B_t, & t \leq T_x. \end{cases}$$

Za $x < 0$ slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(m_t \leq x) &= \mathbb{P}(m_t \leq x, B_t \leq x) + \mathbb{P}(m_t \leq x, B_t > x) = \mathbb{P}(B_t \leq x) + \mathbb{P}(T_x \leq t, B_t > x) \\ &\overset{pr.refl.}{=} \mathbb{P}(B_t \leq x) + \mathbb{P}(T_x^W \leq t, W_t > x) = \mathbb{P}(B_t \leq x) + \mathbb{P}(T_x \leq t, 2B_{T_x} - B_t > x) \\ &= \mathbb{P}(B_t \leq x) + \mathbb{P}(T_x \leq t, B_t < x) = 2\mathbb{P}(B_t \leq x) = \mathbb{P}(-|B_t| \leq x)\end{aligned}$$

pa je

$$f_{m_t}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \ x < 0.$$

(b1) Cijena slučajnog zahtjeva $C = 150 \cdot 1_{\{m_{4/12} \leq 160\}}$, $m_t = \min_{s\in(0,t)} S_t$, jednaka je

$$C_0 = \mathbb{E}^*[e^{-0.05\cdot 4/12} 150 \cdot 1_{\{m_{4/12}\leq 160\}}] = e^{-0.05\cdot 4/12} 150 \mathbb{P}^*(m_{4/12} \leq 160).$$

Neka je $\mu = r/\sigma - \sigma/2$. Kako je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*\left(\min_{t\in(0,1/3)} S_0 e^{\sigma B_t^* + (r-\sigma^2/2)t} \leq x\right) &= \mathbb{P}^*\left(\min_{t\in(0,1/3)} (B_t^* + (r/\sigma - \sigma/2)t) \leq \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{x}{S_0})\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\ln(\frac{x}{S_0}) - \mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu\frac{1}{\sigma}\ln(\frac{x}{S_0})}\Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\ln(\frac{x}{S_0}) + \mu t}{\sqrt{t}}\right),\end{aligned}$$

slijedi

$$C_0 = 147.52\left(\Phi(-2.019) + 0.71\Phi(-1.84)\right).$$

(b2) Neka je $\mu = \alpha/\sigma - \sigma/2$. Računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\min_{t\in(0,1/3)} S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha-\sigma^2/2)t} \leq 160\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{t\in(0,1/3)} (B_t + (\alpha/\sigma - \sigma/2)t) \leq \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{160}{S_0})\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\ln(\frac{160}{S_0}) - \mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu\frac{1}{\sigma}\ln(\frac{160}{S_0})}\Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\ln(\frac{160}{S_0}) + \mu t}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi(-2.31) + 0.234\Phi(-1.56)\end{aligned}$$