FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2019.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Definirajte Brownovo gibanje $B = (B_t)_{t\geq 0}$ i iskažite jednu karakterizaciju Brownovog gibanja.

(b) (4 boda) Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Ispitajte (i dokažite) jesu li slučajni procesi $X = (X_t)_{t\geq 0}$ i $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$,

$$X_t = \tfrac{-1}{2} B_{4t}, \quad Y_t = B_t - tB_1, \quad t \geq 0,$$

također Brownova gibanja.

(c) (4 boda) Iskažite i dokažite teorem o kvadratnoj varijaciji Brownovog gibanja.

(d) (3 boda) Neka su $B^{(1)} = (B_t^{(1)})_{t\geq 0}$ i $B^{(2)} = (B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ sva nezavisna Brownova gibanja. Odredite kvadratnu varijaciju slučajnog procesa $X = (B_t^{(1)} + 2B_t^{(2)})_{t\geq 0}$.

Napomena: Za $Z \sim N(0, \sigma^2)$ vrijedi $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$.

Rješenje.

(a) Definicija 1.4 i Teorem 1.6 s predavanja.

(b) Koristimo definiciju ili karakterizaciju. Proces X je Brownovo gibanje jer

- $X_0 = \frac{-1}{2} B_0 = 0$
- Nezavisnos prirasta slijedi iz nezavisnosti prirasta za B jer je $X_{t+h} - X_t = f(B_{4(t+h)} - B_{4t})$, $t, h > 0$ i $f(x) = \frac{-x}{2}$.
- $X_{t+h} - X_t = \frac{-1}{2}(B_{4(t+h)} - B_{4t}) \sim N(0, \frac{1}{4} \cdot 4h)$
- Neprekidnost trajektorija (g.s.) slijedi iz neprekidnosti trajektorija za B i neprekidnosti funkcije f.

Proces Y nije Brownovo gibanje jer

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(B_t - B_1 - (t-1)B_1) = \mathrm{Var}(B_t - B_1) + (t-1)^2 \mathrm{Var}(B_1) = (t-1) + (t-1)^2 = t(t-1) \neq t.$$

(c) Teorem 1.14 s predavanja.

(d) Uočimo kako iz linearnosti kvadratne kovarijacije slijedi

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_t &= \langle B^{(1)} + 2B^{(2)}, B^{(1)} + 2B^{(2)} \rangle_t = \langle B^{(1)} \rangle_t + 4\langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle_t + 4\langle B^{(2)} \rangle_t \\ &= t + 0 + 4t = 5t, \end{aligned}$$

gdje $\langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle_t = 0$ slijedi iz

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n (B_{t_j}^{(1)} - B_{t_{j-1}}^{(1)})(B_{t_j}^{(2)} - B_{t_{j-1}}^{(2)})\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[B_{t_j}^{(1)} - B_{t_{j-1}}^{(1)}\right] \mathbb{E}\left[B_{t_j}^{(2)} - B_{t_{j-1}}^{(2)}\right] = 0$$

pa po Čebiševljevoj nejednakosti slijedi

$$(\mathbb{P}) \lim_{||\pi|| \to 0} \sum_{j=1}^n (B_{t_j}^{(1)} - B_{t_{j-1}}^{(1)})(B_{t_j}^{(2)} - B_{t_{j-1}}^{(2)}) = 0.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2019.

Zadatak 2. Neka je $B = (B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje.

(a) Neka je slučajni proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ definiran s

$$X_t = tB_t - \int_0^t B_s ds, \ t \geq 0.$$

(a1) (3 boda) Je li proces X martingal obzirom na prirodnu filtraciju za B? Svoju tvrdnju dokažite.

(a2) (3 boda) Odredite $\mathrm{Var}(X_t)$.

(b) (2 boda) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažite: ako je proces $Y = (B_t^2 - at^b)_{t\geq 0}$ martingal (obzirom na prirodnu filtraciju za B) tada je $a = b = 1$.

(c) Neka je $T_x = \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$ i $S = T_2 \wedge T_{-5}$.

(c1) (2 boda) Dokažite da je S vrijeme zaustavljanja (obzirom na prirodnu filtraciju za B).

(c2) (3 boda) Izvedite izraz za $\mathbb{E}[S]$.

Rješenje.

(a1) Neka je $\mathbb{F}$ prirodna filtracija za Brownovo gibanje. Proces X je martingal jer vrijedi:

- X_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriva jer je B_s $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla za $s \leq t$.
- $\mathbb{E}[|X_t|] \leq t\mathbb{E}[|B_t|] + \int_0^t \mathbb{E}[|B_s|]ds < \infty$, jer je $\mathbb{E}[|B_s|] \leq \mathbb{E}[B_s^2] = s$.
- Neka je $s \leq t$. Kako je $B_t - B_s$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$ i B_s $\mathcal{F}_s$-izmjeriva, vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[t(B_t - B_s) + (t-s)B_s|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}\left[\int_s^t B_u du|\mathcal{F}_s\right] \\
&= t\mathbb{E}[B_t - B_s] + (t-s)B_s - \int_s^t \mathbb{E}\left[B_u|\mathcal{F}_s\right] du \\
&= 0 + (t-s)B_s - \int_s^t B_s du = (t-s)B_s - (t-s)B_s = 0.
\end{aligned}$$

(a2) Kako je X martingal, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0$ pa slijedi $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2]$. Nadalje, korištenjem Fubinijevog teorema

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= t^2\mathbb{E}[B_t^2] - 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t B_t B_s ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^t B_u B_s ds du\right] \\
&= t^3 - 2t\int_0^t \mathbb{E}\left[B_t B_s\right] ds + 2\int_0^t \int_0^u \mathbb{E}\left[B_u B_s\right] ds du \\
&= t^3 - 2t\int_0^t s ds + 2\int_0^t \int_0^u s ds du = \frac{t^3}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Kako je X martingal slijedi da je $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_0]$ za svaki $t > 0$, što povlači da je $\mathbb{E}[B_t^2] - at^b = 0$, tj. $at^b = t$, za svaki $t > 0$, odnosno $a = b = 1$.

(c1) B je martingal s neprekidnim trajektorijama pa je

$$\{S > t\} = \bigcap_{\mathbb{Q}\ni s\leq t} \{B_s \in (-2, 5)\} \in \mathcal{F}_t.$$

(c2) Vidi račun iz Zad 1.20 s predavanja, $\mathbb{E}[S] = -10$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2019.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Definirajte Itôv integral za opće integrande i navedite definiciju općeg integranda $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$.

(b) (3 boda) Detaljno pojasnite zašto je gornja definicija Itôvog integrala dobra.

(c) (3 boda) Pokažite da je $\int_0^t e^{\frac{s}{2}} \sin B_s dB_s$ dobro definiran Itôv integral i odredite ga.

Rješenje.

(a) Vidi poglavlje 2.2. s predavanja.

(b) Vidi poglavlje 2.2. s predavanja.

(c) Uočimo da je slučajni proces $(e^{\frac{t}{2}} \sin B_t : t \geq 0)$ u klasi $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ jer je adaptiran obzirom na prirodnu filtraciju za B i vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t e^s \sin^2 B_s ds\right] \leq \int_0^t e^s ds = e^t - 1 < \infty.$$

Iz Itove formule vrijedi

$$\int_0^t e^{\frac{s}{2}} \sin B_s dB_s = -e^{\frac{t}{2}} \cos B_t + 1 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos B_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos B_s dB_s = -e^{\frac{t}{2}} \cos B_t + 1.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2019.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Definirajte Itôv proces.

(b) (3 boda) Iskažite Itôvu formulu za Itôv proces X i $f \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$.

(c) (2 boda) Definirajte Cox-Ingersoll-Rossov model $R = (R_t)_{t\geq 0}$ kamatnih stopa s parametrima $\alpha, \beta, \sigma > 0$.

(d) (3 boda) Neka je $m(t) = \mathbb{E}[R_t]$ i $\gamma(t) = \mathbb{E}[R_t^2]$. Dokažite da funkcije m i γ zadovoljavaju sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\gamma'(t) = (2\alpha + \sigma^2)m(t) - 2\beta\gamma(t).$$

(e) (3 boda) Riješite stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = tX_t dB_t,\ X_0 = 1.$$

Rješenje.

(a) Definicija 2.13 s predavanja.

(b) Teorem 2.15 s predavanja.

(c) R je proces dan stohastičkom diferencijalnom jednadžbom $dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma\sqrt{R_t}dB_t$ uz početni uvjet R_0.

(d) Iz Itôve formule za Itôv proces slijedi da je

$$R_t^2 - R_0^2 = \int_0^t 2R_s(\alpha - \beta R_s + \sigma^2)ds + 2\sigma \int_0^t R_s^{\frac{3}{2}} dB_s.$$

Kako je zadnji član s desne strane (Itôv integral) martingal, djelovanjem s očekivanjem slijedi da je

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \int_0^t 2(\alpha m(s) - \beta\gamma(s) + \sigma^2 m(s))ds + 2\sigma \cdot 0,$$

pa deriviranjem ove jednakosti dobivamo traženu diferencijalnu jednadžbu.

(e) Uočimo da je riječ o homogenoj linearnoj stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi oblika

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s dZ_s,$$

gdje je $dZ_t = tdB_t$. Iz Itove formule vrijedi da je $Z_t = \int_0^t s dB_s$. Također

$$d\langle Z\rangle_t = dZ_t dZ_t = t^2 dB_t dB_t = t^2 dt$$

pa je $\langle Z\rangle_t = \frac{t^3}{3}$. Slijedi da je rješenje dano formulom

$$X_t = \mathcal{E}(Z)_t = e^{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t} = e^{\int_0^t s dB_s - \frac{t^3}{6}}.$$