FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 1. srpnja 2022.

Zadatak 1. Promatramo model financijskog tržista bez arbitraže s dvije financijske imovine: novac i dionica. Cijena dionice modelira se adaptiranim slučajnim procesom $S = (S_t : t \geq 0)$, a novac se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \geq 0)$, koja je također adaptiran slučajni proces. Neka je $T > 0$ vrijeme dospijeća svih slučajnih zahtjeva.

(a) (2 boda) Definirajte dostižan slučajni zahtjev.

(b) (2 boda) Iskažite karakterizaciju dostižnog slučajnog zahtjeva C.

(c) (2 boda) Pod kojim uvjetima je Black-Scholes-Mertonov model potpun? Obrazložite!

(d) Neka je $S_t = S_0 + \alpha t + \sigma B_t$, gdje je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje (u $\mathbf{R}$), $\alpha, S_0 \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$. Pretpostavimo da je $r_t = 0$ za sve $t \geq 0$.

  (d1) (3 boda) Pokažite da je promatrani model bez arbitraže.

  (d2) (4 boda) Odredite cijenu call opcije $C = (S_T - K)_+$ u trenutku $t = 0$.

Rješenje.

(a) str. 60 iz skripte

(b) Propozicija 4.12

(c) str. 64 iz skripte

(d) 2. domaća zadaća

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 1. srpnja 2022.

Zadatak 2. Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata α, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$. Vrijednost europske call-opcije s dospijećem $T > 0$ i cijenom izvršenja $K > 0$ u trenutku $0 \leq t \leq T$ je dana s $c(t, S_t)$, gdje je S_t cijena dionice u trenutku $0 \leq t \leq T$, a $c \in C^{1,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$.

(a) (3 boda) Napišite formulu za $c(t, x)$.

(b) (3 boda) Korištenjem formule pod (a) odredite cijenu europske put opcije s istom cijenom izvršenja i vremenom dospijeća.

(c) (3 boda) Pretpostavimo da je $\alpha = 0.2, \sigma = 0.3$ i $S_0 = 400$. Godišnja kamatna stopa na tržištu novca je 5 %. Odredite poziciju u dionici Δ_t u trenutku $t = 0$ portfelja koji replicira europsku call-opciju s dospijećem 15 mjeseci i cijenom izvršenja 410 kn.

(d) (4 boda) Investitor posjeduje jednu call opciju na dionicu i prodao je jednu put opciju na istu dionicu s istom cijenom izvršenja i vremenom dospijeća. Koliko dionica mora dodati u taj portfelj kako bi svoje ulaganje učinio delta neutralnim? Je li taj delta neutralni portfelj ujedno i gama neutralan? Svoje odgovore detaljno obrazložite.

Rješenje.

(a) Jednadžba (3.11).

(b) Izvod (3.20).

(c) Parametri modela su $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.3$, $S_0 = 400$, $r = 0.05$, $T = \frac{15}{12} = 1.25$ i $K = 410$. Po propoziciji 3.22 slijedi da je

$$\Delta_0 = c_x(0, S_0) = \Phi(d_+),$$

gdje je

$$d_+ = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln \frac{400}{410} + (0.05 + \frac{0.3^2}{2})1.25}{0.3\sqrt{1.25}} \approx 0.28042.$$

Stoga je $\Delta_0 \approx \Phi(0.28) = 0.6103$.

(d) Neka je α broj dionica koje moramo dodati da bi portfelj bio delta neutralan. Vrijednost novog portfelja je tada $g(t, S_t)$, gdje je

$$g(t, x) = -p(t, x) + c(t, x) + \alpha x\,.$$

Tražimo da je

$$0 = \Delta_g = -\Delta_p + \Delta_c + \alpha,$$

no iz call-put pariteta znamo da je

$$p(t, x) = c(t, x) - x + Ke^{-r(T-t)}$$

tj.

$$\Delta_p = \Delta_c - 1.$$

Slijedi $\alpha = 1$. Uočimo da iz call-put pariteta slijedi da je $\Gamma_c = \Gamma_p$ pa je

$$\Gamma_g = -\Gamma_p + \Gamma_c = 0,$$

odnosno novi portfelj je ujedno i gama neutralan.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 1. srpnja 2022.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Odredite $\mathbf{E}[X_t^2]$ za Itôv proces $X = (X_t : t \geq 0)$ dan stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dX_t = X_t dt + dB_t, \quad X_0 = 0.$$

(b) (3 boda) Iskažite Girsanovljev teorem.

(c) (6 bodova) Dokažite Girsanovljev teorem.

Rješenje.

(a) Korištenjem Itôve formule dobivamo

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + \frac{1}{2} \cdot 2dt = (2X_t^2 + 1)dt + 2X_t dB_t.$$

Sada je

$$a(t) := \mathbf{E}[X_t^2] = \int_0^t \mathbf{E}[2X_s^2 + 1]ds + 2\mathbf{E}\left[\int_0^t 2X_s dB_s\right] = \int_0^t (2a(s) + 1)ds,$$

odnosno $m'(t) = (2m(t) + 1)dt$. Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe dobivamo $m(t) = \frac{ce^{2t} - 1}{2}$, pri čemu iz početnog uvjeta dobivamo $c = 1$.

(b - c) Teorem 4.4

FINANCIJSKO MODELIRANJE 2

Drugi kolokvij – 1. srpnja 2022.

Zadatak 4. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(a) (4 boda) Izračunajte $\mathbf{E}[X^2]$, gdje je $X = \max\limits_{a \leq t \leq b} B_t$ i $0 < a < b$.

(b) Cijena dionice modelirana je geometrijskim Brownovim gibanjem s parametrima $\alpha = 0.1$ i $\sigma = 0.2$. Početna cijena dionice je 300 kn, a kamatna stopa je 5%.

(b1) (4 boda) Odredite cijenu up-and-out opcije s cijenom izvršenja 300 kn, barijerom 320 kn i dospijećem 6 mjeseci.

(b2) (4 boda) Izračunajte vjerojatnost da vrijednost opcije pod (b1) bude nula u trenutku dospijeća.

Napomena: Za $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i $\mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbf{P}(\max_{0 \leq s \leq t}(B_s + \mu s) \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x + \mu t}{\sqrt{t}}\right), \ x > 0$$
$$\mathbf{P}(\min_{0 \leq s \leq t}(B_s + \mu s) \geq x) = \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{x + \mu t}{\sqrt{t}}\right), \ x < 0.$$

Rješenje.

(a) Za $\widetilde{X} = \max_{a \leq t \leq b}(B_t - B_a)$ vrijedi $X = \widetilde{X} + B_a$ i $\widetilde{X} \overset{d}{=} |B_{b-a}|$ (jer je proces $(B_t - B_a : t \geq a)$ Brownovo gibanje). Kako je $(B_t - B_a : t \geq a)$ nezavisan od B_a slijedi da su i slučajne varijable $\widetilde{X}$ i B_a nezavisne. Stoga je

$$\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[\widetilde{X}^2] + \mathbf{E}[B_a^2] + 2\mathbf{E}[\widetilde{X}]\underbrace{\mathbf{E}[B_a]}_{=0} = \mathbf{E}[B_{b-a}^2] + \mathbf{E}[B_a^2] = b - a + a = b.$$

(b1) Traži se cijena slučajnog zahtjeva

$$C = K \cdot 1_{\{\max\limits_{0 \leq t \leq T} S_t \leq b\}},$$

gdje je $K = 300$, $b = 320$ i $T = \frac{6}{12} = 0.5$. Neka je $\mathbf{P}^\star$ ekvivalentna martingalna mjera uz koju je

$$B_t^\star = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma} t$$

Brownovo gibanje. Tada je cijena slučajnog zahtjeva C dana s

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbf{E}^\star[e^{-rT}C] = \mathbf{E}^\star[Ke^{-rT}1_{\{\max\limits_{0 \leq t \leq T} S_t \leq b\}}] \\ &= Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\max_{0 \leq t \leq T} S_t \leq b) = Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\max_{0 \leq t \leq T}(B_t^\star + (\tfrac{r}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \leq \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{b}{S_0}) \\ &= Ke^{-rT}\mathbf{P}^\star(\max_{0 \leq t \leq T}(B_t^\star + \mu t) \leq x), \end{aligned}$$

gdje je

$$\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20} = 0.15 \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} = 5\ln\frac{320}{300} = 5\ln\frac{16}{15}.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije minimuma Brownovog gibanja s driftom dobije se

$$\mathbf{P}^\star(\max_{0\le t\le T}(B_t^\star+\mu t)\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right)-e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x+\mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right).$$

Dakle,

$$\begin{aligned}V_0&=300e^{-0.05\cdot 0.5}\left[\Phi\left(\frac{5\ln\frac{16}{15}-0.15\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)-e^{2\cdot 0.15\cdot 5\ln\frac{16}{15}}\Phi\left(-\frac{5\ln\frac{16}{15}+0.15\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)\right]\\&\approx 292.59\left[\Phi(0.35)-\left(\frac{16}{15}\right)^{1.5}\Phi(-0.56)\right].\end{aligned}$$

(b2) Tražimo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\max_{0\le t\le 0.5}S_t\ge 320)&=\mathbf{P}(\max_{0\le t\le 0.5}S_0e^{\sigma B_t+(\alpha-\frac{\sigma^2}{2})t}\ge 320)\\&=\mathbf{P}(\max_{0\le t\le 0.5}(B_t+(\tfrac{\alpha}{\sigma}-\tfrac{\sigma}{2})t)\ge\tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{320}{S_0})\\&=\mathbf{P}(\max_{0\le t\le 0.5}(B_t+\mu t)\ge x)\,,\end{aligned}$$

gdje je

$$\mu=\frac{\alpha}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}=0.4\quad\text{i}\quad x=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{320}{S_0}=5\ln\frac{320}{300}=5\ln\frac{16}{15}\,.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije minimuma Brownovog gibanja s driftom dobijemo

$$\mathbf{P}(\max_{0\le t\le 0.5}(B_t+\mu t)\ge x)=1-\Phi\left(\frac{x-\mu\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)+e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x+\mu\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)$$

pa je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\min_{0\le t\le 0.5}S_t\ge 280)&=1-\Phi\left(\frac{5\ln\frac{16}{15}-0.4\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)+e^{2\cdot 0.4\cdot 5\ln\frac{16}{15}}\Phi\left(-\frac{5\ln\frac{16}{15}+0.4\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)\\&\approx\Phi(-0.1735)-\left(\frac{16}{15}\right)^4\Phi(0.739)\,.\end{aligned}$$