FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

SAŽETAK. Ovo su materijali za kolegij Financijsko modeliranje 1. Čitatelje koji uoče greške bilo kakve prirode molimo da na njih ukažu putem maila. Isto vrijedi i za sve komentare i sugestije koje bi mogle poboljšati izlaganje sadržaja.

SADRŽAJ

1. UVOD

1.1. **Cilj kolegija.** Osnovni cilj kolegija je uvesti modele financijskog tržišta u diskretnom vremenu, te objasniti vjerojatnosne metode za precizan matematički opis i razumijevanje tih modela. Kolegij je podijeljen u 3 glavna dijela:

Posljednja izmjena: 20. siječnja 2021.

(i) **Jednoperiodni modeli**
Opisujemo općeniti jednoperiodni model financijskog tržišta (u kojem se promatra evolucija tržišta u jednom vremenskom trenutku). Uvodimo osnovne pojmove: financijska imovina, portfelj, arbitraža, martingalna mjera, potpunost tržišta, povrat i rizik. Dokazujemo fundamentalne teoreme financijskih tržišta koji daju vezu između arbitraže/potpunosti i martingalne mjere. Promatramo izvedene vrijednosnice, te određivanje nearbitražne cijene ipripadnog replicirajućeg portfelja.

(ii) **Dinamički diskretni modeli**
Rezultate i pojmove iz prvog poglavlja generaliziramo na modele tržišta koji promatraju evoluciju tržišta kroz konačno mnogo vremenskih trenutaka. Podsjećamo se osnovnih rezultata iz teorije martingala, te promatramo osnovni višeperiodni model financijskih tržišta zvan Cox-Ross-Rubinsteinov model.

(iii) **Problem optimalnog zaustavljanja i američke opcije**
Podsjećamo se teorije (diskretnih) supermartingala, uvodimo vremena zaustavljanja i Snellov omotač slučajnog procesa, specijalno Markovljevog lanca. Primjenjujemo matematičku teoriju na problem određivanja nearbitražnih cijena američkih opcija u CRR modelu.

Predavanja prate skriptu Z.Vondraček: *Financijsko modeliranje.* Osnovnu literaturu za kolegij čine sljedeće publikacije:

- W. A. Baxter, A. Rennie, *Financial Calculus*, Cambridge University Press, 1996.
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapmann & Hall, 1996.
- M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.
- S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell Publishers, 1997.
- S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, 2004.

1.2. **Osnovni elementi financijskog tržišta.** Financijska tržišta općenito su kompleksna, no mi ćemo usklopu ovog kolegija promatrati osnovi model koji se u načelu sastoji od dvije vrste financijskih imovina - rizičnu i nerizičnu.

Kao **rizičnu imovinu** uzet ćemo dionicu. Zašto rizična? Zato što cijena dionice neprestano fluktuira, uglavnom na nepredvidiv način. Stoga ulaganje u dionice u sebi nosi rizik.

Pod **nerizičnom imovinom** smatrat ćemo financijski instrument koji donosi siguran, predvidiv povrat. To je najjednostavnije modelirati novcem u banci (npr. na štednoj knjižici) uloženim uz fiksnu kamatnu stopu.

Zašto investitori ulažu u rizičnu imovinu? Zato što očekuju veći povrat nego kod nerizične imovine, te su stoga spremni preuzeti rizik.

Osim dionica i novca u banci, promatrat ćemo i **opcije**, odnosno izvedene vrijednosne papire (izvedenice, engl. derivative securities, derivatives). Otkud ime izvedeni vrijednosni papiri? Zato što je njihova vrijednost, odn. cijena, izvedena iz vrijednosnice na koju su napisani. Na primjer, vrijednost opcije na dionicu izvedena je iz vrijednosti dionice (što ne znači da ne ovisi i o drugim faktorima).

Što je u stvari opcija? Opcija je ugovor koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti ili prodati neku imovinu do određenog datuma (ili na određeni datum) po unaprijed dogovorenoj cijeni. Osnovno svojstvo opcije je da vlasnik opcije **ne** mora kupiti (odn. prodati) imovinu. U ugovoru sudjeluju dvije strane - prodavatelj (pisac) opcije, t.j. osoba koja izdaje opciju, te kupac opcije, t.j. osoba koja postaje vlasnik opcije.

Uobičajeniji **ugovor** između dvije strane je tzv. *forward* ugovor. Po tom ugovoru se jedna od strana obavezuje prodati (ili kupiti) od druge strane neku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni. U ovom slučaju stranka je obavezna na prodaju (ili kupnju) i ne može odustati od ugovora. Dakle, za razliku od opcije, kod forwarda ne postoji opcija odustajanja.

Primjer 1.1. Cijena jedne dionice Kraša KRAS na dan 5.10.2020. iznosila je $S_0 = 605.00$ Kn. *Call opcija* (*opcija poziva*) s *danom dospijeća* 5.1.2021. (engl. *maturity*) i *cijenom izvršenja* $K = 610.00$ Kn (engl. *strike price, exercise price*) je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na kupnju (od pisca opcije) jedne dionice KRAS-a na dan 5.1.2021. po cijeni od $K = 610.00$ Kn. *Put opcija* (*opcija ponude*) s *danom dospijeća* 5.1.2021. i *cijenom izvršenja* $K = 610.00$ Kn je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na prodaju (piscu opcije) jedne dionice KRAS-a na dan 5.1.2021. po cijeni od $K = 610.00$ Kn. Neka je S_T cijena jedne dionice Kraša na dan dospijeća 5.1.2021.

Pozicija kupca (odn. vlasnika) call opcije na dan dospijeća 5.1.2021.

- ako je cijena $S_T > K = 610.00$, na primjer, $S_T = 620.00$ Kn, vlasnik opcije će iskoristit svoje pravo i kupiti (od pisca) jednu dionicu Kraša za 610.00 Kn, te je istog trenutka prodati na tržištu za tržišnu cijenu od $S_T = 620.00$ Kn. Na taj način će kupac ostvariti profit od $S_T - K = 620.00 - 610.00 = 10.00$ Kn.
- ako je cijena $S_T \leq K = 610.00$ Kn, na primjer, $S_T = 600.00$ Kn, vlasnik opcije ne koristi svoje pravo, jer na tržištu dionicu može kupiti jeftinije od cijene dospijeća.
- vrijednost opcije na dan dospijeća jednaka je $\max(S_T - K, 0) = \max(10, 0)$.

Pozicija pisca call opcije na dan dospijeća 5.1.2021. je suprotna od kupčeve:

- ako je cijena $S_T > K = 610.00$, na primjer, $S_T = 620.00$ Kn, pisac opcije mora prodati dionicu Kraša za $K = 610.00$ kn, dok je tržišna vrijednost $S_T = 620.00$ Kn, te prema tome gubi 10.00 Kn.
- ako je cijena $S_T \leq K = 610.00$ Kn, kupac ne koristi ugovor, te pisac ne gubi ništa.
- vrijednost opcije na dan dospijeća jednaka je $-\max(S_T - K, 0) = -\max(10, 0)$.

Zaključak: budući da vlasnik opcije može samo dobiti ugovorom, a pisac opcije samo izgubiti, jasno je da pisac mora od kupca tražiti premiju za pravo koje opcija daje. Ta premija je cijena opcije koju kupac mora platiti piscu na dan izdavanja opcije.
Osnovno pitanje: kolika je pravedna (racionalna) cijena opcije?

1.3. **Osnovne ideje određivanja cijene opcija.** Sada ćemo na vrlo jednostavnom modelu objasniti osnovnu ideju određivanja pravedne cijene opcija. Da bismo to mogli učiniti, uvodimo sljedeće pretpostavke o financijskom tržištu (tzv. tržište *bez trenja*):

- sve stranke imaju isti pristup relevantnim informacijama,
- ne postoje troškovi transakcija (trgovanje je besplatno),
- sva financijska imovina je beskonačno dijeljiva i likvidna,
- kamatna stopa jednaka je za posuđivanje i ulaganje.

Vratimo se na Primjer 1.1: $S_0 = 605.00$, $K = 610.00$, $T = 3$ mjeseca. Pretpostavimo da je kamatna stopa za 3 mjeseca fiksna i iznosi 1%. To znači da jedna kuna uložena danas za tri mjeseca daje 1.01 Kn. Stavimo $r = 0.01$. Da bismo mogli odrediti cijenu call opcije, moramo na neki način modelirati slučajno kretanje cijene dionice Kraša. Predlažemo najjednostavniji mogući model, za koji je jasno da nije realan. Bez obzira na to, model je ilustrativan i poučan, a pokazat ćemo tokom kolegija da se može poopćiti tako da zadrži jednostavno svojstvo, ali postaje puno realniji.

Pretpostavke: nakon tri mjeseca, $T = 3$, cijena jedne dionice Kraša može porasti i iznosit će $S^g = 620.00$ Kn, ili može pasti i iznosit će $S^d = 600.00$ Kn. Reći ćemo da se dogodio elementarni događaj ω_1 ako je cijena jednaka S^g, odnosno da se dogodio ω_2 ako je cijena jednaka S^d. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Cijena dionice nakon tri mjeseca S_T je slučajna i vrijedi

$$
\begin{aligned}
S_T(\omega_1) &= S^g = 620.00\,, \\
S_T(\omega_2) &= S^d = 600.00\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & S_T(\omega_1) = S^g \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_T(\omega_2) = S^d
\end{tikzcd}
$$

Dakle, $S_T : \Omega \to \mathbf{R}_+$ je slučajna varijabla. Naravno, u trenutku $t = 0$ (t.j. sada), ne znamo da li će se dogoditi ω_1 ili ω_2 (odnosno koje je pravo stanje svijeta).

Izračunajmo vrijednost C_T call opcije u trenutku T. Uočimo da ta vrijednost ovisi o tome da li se dogodio ω_1 ili ω_2. Dakle, $C_T : \Omega \to \mathbf{R}_+$ je slučajna varijabla i vrijedi:

$$
\begin{aligned}
C_T(\omega_1) &= S_T(\omega_1) - K = S^g - K = 620.00 - 610.00 = 10.00\,, \\
C_T(\omega_2) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Uočimo da možemo pisati $C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Također, C_T koji smo gore izračunali je vrijednost opcije u kunama nakon tri mjeseca. Zbog vremenske vrijednosti novca, sadašnja vrijednost opcije nakon tri mjeseca je $(1+r)^{-1}C_T$. Tu vrijednost zvat ćemo diskontirana vrijednost. Dakle

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+r} C_T(\omega_1) &= \frac{1}{1+0.01} \times 10 = 9.9\,, \\
\frac{1}{1+r} C_T(\omega_2) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Jedna od mogućih ideja određivanja cijene opcija je izračunati očekivanje njezine diskontirane vrijednosti. Za računanje očekivanja potrebno je odrediti vjerojatnosti elementarnih događaja. Postoje dva načina kako se to može učiniti. Jedan je statistički, po kojem se vjerojatnosti procjenjuju iz povijesnih podataka. Takvu vjerojatnost možemo zvati objektivnom. Drugi način određivanja vjerojatnosti je subjektivan, po kojem investitori procjenjuju vjerojatnosti na subjektivan način (korištenjem informacija unutar i izvan tržišta). Na primjer, na tržištu na kojem se očekuje pad cijena dionica (bear market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 0.2 \qquad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 0.8\,.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{1+r}C_T\right] = 0.2 \times \frac{1}{1.01} \times 10 + 0.8 \times \frac{1}{1.01} \times 0 = 1.98\,.$$

Dakle, investitoru koji predviđa pad tržišta (uz subjektivnu procjenu vjerojatnosti kao gore), opcija vrijedi 1.91 Kn (odnosno, toliko je spreman platiti za nju). Na tržištu na kojem se očekuje rast cijena dionica (bull market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 0.8 \qquad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 0.2\,.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{1+r}C_T\right] = 0.8 \times \frac{1}{1.01} \times 10 + 0.2 \times \frac{1}{1.01} \times 0 = 7.92\,,$$

odnosno četiri puta više. Jasno je da će se na takav način dvije strane u ugovoru koje imaju suprotna očekivanja o tržištu teško dogovoriti o cijeni opcije. Međutim, za izgradnju pouzdanog modela financijskog tržišta, mora biti zagarantirana jedinstvenost cijene izvedenih vrijednosnica. To se može postići primjenom **replicirajućeg portfelja**.

Objasnimo detaljno što je to replicirajući portfelj. Pretpostavimo da investitor može trgovati sa dvije financijske imovine - dionicama Kraša i novcem u banci (t.j., može uložiti novac u banku ili ga posuditi iz banke). Označimo sa ϕ^1 broj dionica Kraša koje investitor posjeduje (ili kupi) u trenutku $t = 0$ (zbog pretpostavke o beskonačnoj djeljivosti ϕ^1 može biti proizvoljan realan broj). Neka je ϕ^0 iznos novca koji investitor u trenutku $t = 0$ ima u banci (ϕ^0 može biti negativan - novac posuđen iz banke). Uređen par $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{R}^2$ zovemo portfelj u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost $V_0(\phi)$ takvog portfelja ϕ? Očito je

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = \phi^0 + 605\phi^1\,.$$

Kolika je vrijednost $V_T(\phi)$ portfelja ϕ u trenutku $t = T$? Budući da je cijena dionice Kraša slučajna, to će i vrijednost portfelja biti slučajna varijabla, $V_T(\phi) : \Omega \to \mathbf{R}$. Vrijedi:

$$V_T(\phi) = \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T\,.$$

Preciznije

$$\begin{aligned} V_T(\phi)(\omega_1) &= \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T(\omega_1) = 1.01\phi^0 + 620.00\phi^1\,, \\ V_T(\phi)(\omega_2) &= \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T(\omega_2) = 1.01\phi^0 + 600.00\phi^1\,. \end{aligned}$$

Kažemo da portfelj ϕ replicira call opciju ako vrijedi $V_T(\phi) = C_T$, t.j., vrijednost portfelja jednaka je vrijednosti call opcije.

Pitanje: da li postoji replicirajući portfelj za našu call opciju? Odgovor je pozitivan što se lako i vidi. Zaista, replicirajući portfelj ϕ mora zadovoljavati sljedeće dvije jednakosti: $V_T(\phi)(\omega_1) = C_T(\omega_1)$ i $V_T(\phi)(\omega_2) = C_T(\omega_2)$. To možemo napisati kao

$$\begin{aligned} 1.01\phi^0 + 620.00\phi^1 &= 10.00\,, \\ 1.01\phi^0 + 600.00\phi^1 &= 0\,. \end{aligned}$$

To je sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, ϕ^0 i ϕ^1. Rješavanjem slijedi:

$$\phi^0 = -297.03\,, \qquad \phi^1 = \frac{1}{2} = 0.5\,.$$

Dakle, portfelj $\phi = (-297.03, 0.5)$ replicira call opciju, odnosno portfelj ϕ i call opcija imaju jednaku vrijednost u trenutku $t = T$. Prema tome, portfelj ϕ i call opcija moraju imati jednaku vrijednost i u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$? Računamo:

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = -297.03 + 605 \times 0.5 = 5.47\,.$$

Međutim, to znači da je i vrijednost call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka upravo $C_0 = 5.47$.

Pogledajmo malo detaljnije princip na kojem se zasniva određivanje cijene opcije pomoću replicirajućeg portfelja.

Pretpostavimo da je pisac uspio prodati razmatranu opciju za iznos $C_0 > 5.47$, na primjer za $C_0 = 7.00$ Kn. Za 5.47 Kn odmah kupi portfelj $\phi = (-297.03, 0.5)$, t.j., iz banke posudi 297.03 Kn, i kupi 0.5 dionica Kraša po cijeni od 605.00 Kn (uočite da mu za to treba $0.5 \times 605.00 = 302.50$ Kn. Međutim, 302.50=297.03+5.47). Razliku od 7.00-5.47=1.53 Kn stavi u banku uz kamatu 1% (ili u džep). U vremenu T vrijednost portfelja $V_T(\phi) = C_T$, te je pisac u stanju točno pokriti obavezu iz ugovora. U međuvremenu, 1.53 Kn u banci naraslo je na $1.53 \times 1.01 = 1.55$ Kn. Na taj način je pisac opcije ostvario nerizičan profit od 1.55 Kn.

Obratno, pretpostavimo da je kupac uspio kupiti opciju za iznos $C_0 < 5.47$, na primjer, za $C_0 = 4$ Kn. Istog trenutka kupac prodaje portfelj $\phi = (-297.03, 0.5)$ za 5.47 Kn (to znači da posudi 0.5 dionica Kraša ("short sell"), odmah ih proda za 302.50 Kn, a 297.03 Kn uloži u banku). Razliku od 5.47-4.00=1.47 Kn uloži u banku uz kamatu od 1% (ili stavi u džep). U trenutku T, vrijednost opcije koju posjeduje C_T jednaka je vrijednosti portfelja $V_T(\phi)$ kojeg je prodao. Stoga ima dovoljan iznos da otkupi natrag portfelj ϕ (to znači da izvadi novce iz banke, kupi 0.6 dionica Kraša bilo po cijeni na koju ima pravo po ugovoru, bilo po tržišnoj cijeni, te vrati 0.6 dionica Kraša). Time je na nuli, osim 1.47 Kn u banci koje su narasle na $1.47 \times 1.01 = 1.485$ Kn, što je nerizičan profit.

Iz gornjeg razmatranja se vidi da jedina cijena opcije koja niti piscu niti kupcu ne omogućava nerizičan profit mora biti jednaka 5.47 Kn. Portfelj koji donosi nerizičan profit naziva se **arbitraža** (ili mogućnost arbitraže). Ekonomski je opravdano pretpostaviti da na tržištu ne postoje mogućnosti arbitraže. Slijedi da je nepostojanje arbitraže na financijskom tržištu ekonomski princip pomoću kojeg smo odredili cijenu opcije. Što onda vjerojatnost radi u ovoj priči? Uloga vjerojatnosti ima tehnički karakter. Objasnimo to malo detaljnije.

Pokušajmo naći vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathbf{P}^*(\{\omega_1\}) = p^*$, $\mathbf{P}^*(\{\omega_2\}) = 1 - p^*$, takvu da je očekivana (uz vjerojatnost $\mathbf{P}^*$) diskontirana vrijednost dionice u trenutku T jednaka sadašnjoj vrijednosti S_0. Dakle, zahtijevamo

$$\mathbf{E}^*\left[\frac{1}{1+r} S_T\right] = S_0\,,$$

t.j.,

$$p^* \frac{1}{1.01} \times 620.00 + (1 - p^*) \frac{1}{1.01} \times 600.00 = 605.00\,.$$

Rješavanjem slijedi $p^* = 0.554$. Uočimo da je $\mathbf{E}^*[S_T] = (1 + r)S_0$, t.j., upravo onoliko koliko bismo imali u trenutku T da smo novac uložili u nerizičnu imovinu (dakle u banku). Stoga vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ zovemo vjerojatnost neutralna na rizik - očekivani (uz $\mathbf{P}^*$) povrat na dionicu jednak je nerizičnom povratu od 1%.

Kakve to veze ima sa cijenom opcije? Izračunajmo očekivanu (uz $\mathbf{P}^*$) diskontiranu vrijednost opcije u trenutku $t = T$:

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{1}{1+r} C_T \right] = p^* \frac{1}{1.01} \times 10 + (1 - p^*) \frac{1}{1.01} \times 0 = 5.47 \, .$$

Međutim, to je upravo cijena opcije C_0 koju smo gore dobili konstrukcijom replicirajućeg portfelja. U kolegiju ćemo pokazati da to nije slučajno, te zašto računanje očekivanja (uz vjerojatnost neutralnu na rizik) diskontirane vrijednosti opcije daje cijenu opcije u trenutku $t = 0$. Uočite da je drugi postupak brži i jednostavniji.

2. Jednoperiodni modeli u diskretnom vremenu

2.1. **Opis modela: imovine, portfelji i arbitraža.** U ovom poglavlju ćemo pretpostavljati da se imovinom na financijskom tržištu može trgovati u dva vremenska trenutka: $t = 0$ (sadašnjost) i $t = 1$ (neko fiksno vrijeme u budućnosti). Između ta dva trenutka imamo jedan period otkud ime modelu.

Promatramo financijsko tržište s $d+1$ financijskom imovinom (to mogu biti dionice, obveznice, valuta ili novac). Koristimo sljedeće oznake:

- S_0^i= **cijena (vrijednost)** i-te financijske imovine u trenutku $t = 0$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Pretpostavit ćemo da nam je ta cijena poznata (u svim trenutcima), te da je $S_0^i \geq 0$ za sve i.
- S_1^i= cijena i-te imovine u trenutku $t = 1$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Pretpostavljamo da je S_1^i nenegativna slučajna varijabla za sve i (u trenutku $t = 0$ ta cijena nam je nepoznata zbog slučajnih fluktuacija).
- Vektor $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$ nazivamo **sustav cijena** u trenutku t, $t = 0, 1$. Uočimo, u trenutku $t = 0$ je $S_0 \in \mathbf{R}_+^{d+1}$ vektor nenegativnih brojeva, dok je S_1 nenegativni slučajni vektor.

Vjerojatnosni prostor: Kada govorimo o slučajnim varijablama pretpostavljamo da u pozadini postoji neki vjerojatnosni prostor. Neka je to $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Prisjetimo se da je Ω prostor elementarnih događaja ω. O elementarnim događajima $\omega \in \Omega$ razmišljamo kao o mogućim stanjima svijeta u budućnosti $t = 1$, ili kao o mogućim scenarijima. Ukoliko je stvarno stanje svijeta jednako ω, tada je cijena i-te imovine u trenutku $t = 1$ jednaka $S_1^i(\omega) \in \mathbf{R}_+$. U ovom poglavlju ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je prostor elementarnih događaja konačan, tj. da se može dogoditi najviše konačno različitih scenarija. Dakle,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\} \text{ za neki } K \in \mathbf{N}.$$

Za σ-algebru događaja $\mathcal{F}$ ćemo za sada uzeti partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$, ali to općenito nije nužno. Uz tu konvenciju, svako preslikavanje sa Ω u $\mathbf{R}$ je slučajna varijabla. Za vjerojatnost $\mathbf{P}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ pretpostavljamo da zadovoljava uvjet $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$, tj. da su svi scenariji zaista mogući.

Pretpostavit ćemo da naše financijsko tržište sadrži jednu *nerizičnu* imovinu i specifirat ćemo da je to imovina s indeksom 0. Preciznije, pretpostavljamo da vrijedi:

$$S_0^0 = 1 \quad \text{i} \quad S_1^0 \equiv 1 + r \, ,$$

gdje je $r \in \mathbf{R}$ konstanta. Financijski je opravdano zahtijevati $r \geq 0$, dok je matematički dovoljno $r > -1$. Za ostale imovine pretpostavljamo da su *rizične*, tj. da su za $i = 1, 2, \dots, d$, S_1^i (nekonstantne) slučajne varijable.

Definicija 2.1. **Portfelj** je vektor $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d) \in \mathbf{R}^{d+1}$, gdje ϕ^i predstavlja broj jedinica i-te financijske imovine koju investitor posjeduje u trenutku $t = 0$. **Vrijednost portfelja** ϕ u trenutku $t = 0, 1$ jednaka je

$$V_t(\phi) = \sum_{i=0}^{d} \phi^i S_t^i = \phi \cdot S_t \,,$$

gdje $\cdot$ označava skalarni produkt u $\mathbf{R}^{d+1}$.

Uočimo par napomena vezanih uz Definiciju 2.1:

- Primijetimo da definicija portfelja dozvoljava da je $\phi^i < 0$. Na primjer, ako je $\phi^0 < 0$ znači da smo iz banke **posudili** $|\phi^0|$ novčanih jedinica. Pretpostavka $\phi^i < 0$ za neki $i = 1, 2, \dots, d$, odgovara **short sale** imovine i.
- Uočimo da je $V_0(\phi) \in \mathbf{R}$ realan broj. S druge strane $V_1(\phi) = \phi \cdot S_1$ je funkcija slučajnog vektora S_1, stoga je vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 1$ slučajna varijabla.

Pretpostavimo da smo u trenutku $t = 0$ konstruirali portfelj ϕ čija je vrijednost $V_0(\phi) = 0$. Na primjer, iz banke smo posudili izvjestan iznos novca $\phi_0^0 < 0$, te za taj iznos kupili neke dionice. U trenutku $t = 1$ pokazat će se koje je stvarno stanje svijeta $\omega \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$. Pretpostavimo da za svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $\phi \cdot S_1(\omega) \geq 0$, te da postoji barem jedan ω' takav da je $\phi \cdot S_1(\omega') > 0$. To znači da uz ulog jednak nuli (vrijednost portfelja ϕ u $t = 0$), sigurno ne možemo izgubiti, te uz barem jedan scenarij ostvarujemo strogo pozitivnu dobit. Takav portfelj zove se arbitraža.

Definicija 2.2. Portfelj ϕ naziva se **arbitraža** (ili mogućnost arbitraže), ako vrijedi $\phi \cdot S_0 = 0$, ali je $\phi \cdot S_1 \geq 0$ $\mathbf{P}$-g.s. i $\mathbf{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$.

Intuitivno, arbitraža je portfelj koji nije izložen riziku gubitka, i s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit. Postojanje arbitraže na tržištu ukazuje na neefikasnost tržišta. U realnom životu na tržištu je teško pronaći mogućnost arbitraže.

Napomena 2.3. U paragrafu prije definicije, arbitraža je definirana bez pozivanja na vjerojatnost $\mathbf{P}$. Na koji način vjerojatnost $\mathbf{P}$ ulazi u definiciju arbitraže? Jednostavno se vidi da je to samo kroz činjenicu da je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$.

Uvjet ekvivalentan nepostojanju arbitraže može se iskazati na sljedeći način: svaka investicija u rizičnu imovinu koja s pozitivnom vjerojatnošću donosi bolji rezultat nego investicija u nerizičnu imovinu izložena je riziku. Matematički se to iskazuje ovako:

Lema 2.4. *Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(a) *Model tržišta dopušta arbitražu.*

(b) *Postoji vektor $(\phi^1, \dots, \phi^d) \in \mathbf{R}^d$ takav da je*

$$\sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i \geq (1+r) \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_0^i \ \mathbf{P} g.s. \qquad i \quad \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i > (1+r) \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_0^i\right] > 0 \,.$$

Dokaz. (a)⇒(b): Neka je ϕ arbitraža. Tada je $0 = \phi \cdot S_0 = \phi^0 + \sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i$. Slijedi,

$$\sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i - (1+r)\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i = \sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i + (1+r)\phi^0 = \phi \cdot S^1 .$$

Budući da je $\phi \cdot S_1$ **P**-g.s. nenegativno i strogo pozitivno s pozitivnom vjerojatnošću, isto mora vrijediti i za lijevu stranu $\sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i - (1+r)\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i$.

(b)⇒(a): Neka je $(\phi^1, \dots, \phi^d)$ kao u pretpostavci (b). Definiramo $\phi^0 := -\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i$. Tvrdimo da je portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ arbitraža. Po definiciji je $\phi \cdot S_0 = \phi^0 + \sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i = 0$. Nadalje, $\phi \cdot S_1 = (1+r)\phi^0 + \sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i = -(1+r)\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i + \sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i$ što je **P**-g.s. nenegativno i strogo pozitivno s pozitivnom vjerojatnošću. □

2.2. **Nepostojanje arbitraže i martingalna mjera.** U prethodnom odjeljku uveli smo pojam arbitraže pomoću ekonomskog uvjeta - nerizičan profit nije moguć, te smo komentirali da je na stvarnim financijskom tržištima teško pronaći mogućnost arbitraže. Zato ćemo nadalje modelirati samo tržišta koja ne dopuštaju arbitražu. Kako možemo provjeriti da model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu? Po definiciji bismo trebali provjeriti da niti jedan portfelj nije arbitraža. To nije tako jednostavno, te ćemo u ovom odjeljku dati operativniji uvjet nepostojanja arbitraže. Taj uvjet baziran je na egzistenciji tzv. martingalne mjere:

Definicija 2.5. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **martingalna mjera** ili **mjera neutralna na rizik**, ako vrijedi

$$S_0^i = \mathbf{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right], \quad i = 0, 1, \dots, d. \tag{2.1}$$

Primijetimo da je $S_1^i/(1+r)$ diskontirana vrijednost i-te financijske imovine u $t = 1$. Definicija kaže da je očekivanje te diskontirane vrijednosti po martingalnoj mjeri $\mathbf{P}^*$ jednako cijeni imovine u trenutku $t = 0$. Na formulu (2.1) možemo gledati kao na formulu određivanja cijene imovine - cijena je očekivanje diskontirane vrijednosti, ali ne uz objektivnu mjeru $\mathbf{P}$, nego uz martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. U sljedećem poglavlju objasnit ćemo naziv martingalna mjera. Zašto $\mathbf{P}^*$ zovemo mjerom neutralnom na rizik vidimo ovako: diskontirana vrijednost nerizične imovine S^0 u $t = 1$ jednaka je $S_1^0/(1+r) = 1$, te je formula (2.1) trivijalno ispunjena. Uz $\mathbf{P}^*$ očekivana vrijednost rizične imovine jednaka je očekivanoj vrijednosti nerizične imovine. Dakle, ta mjera je neutralna na rizik, za razliku od objektivne mjere $\mathbf{P}$ uz koju diskontirana rizična imovina ima veće očekivanje od nerizične (ako već preuzimamo rizik, očekujemo veći povrat).

Podsjetimo se, za vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ kažemo da je **ekvivalentna** s $\mathbf{P}$ i pišemo $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$, ako, za svaki $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}^*(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{P}(A) = 0.$$

Uočimo da na diskretnom vjerojatnosnom prostoru Ω na kojem je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$, vrijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$ ako i samo ako je $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$.

Uvedimo familiju svih martingalnih mjera ekvivalentnih s $\mathbf{P}$:

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{P}^* \;:\; \mathbf{P}^* \text{ je martingalna mjera i } \mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}\}.$$

Sljedeći osnovni rezultat je najjednostavniji oblik tzv. **fundamentalnog teorema određivanja cijena imovine**.

Teorem 2.6. *Model tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (tj. ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera).*

Dokaz. $\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$. Neka je $\phi \in \mathbf{R}^{d+1}$ portfelj takav da je $\phi \cdot S_1 \geq 0$ $\mathbf{P}$-g.s. i $\mathbf{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$. Pokažimo da je tada nužno $V_0(\phi) > 0$, tj. da portfelj ϕ ne može biti arbitraža.

Budući da je $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$, vrijedi

$$\phi \cdot S_1 \geq 0 \ \mathbf{P}^*\text{-g.s. i } \mathbf{P}^*[\phi \cdot S_1 > 0] > 0.$$

Slijedi da je $\mathbf{E}^*[\phi \cdot S_1] > 0$. Uočimo da je po pretpostavci

$$\phi^i S_0^i = \phi^i \mathbf{E}^* \left[\frac{S_1^i}{1+r} \right] = \mathbf{E}^* \left[\frac{\phi^i S_1^i}{1+r} \right],$$

otkud

$$V_0(\phi) = \phi \cdot S_0 = \sum_{i=0}^{d} \phi^i S_0^i = \sum_{i=0}^{d} \mathbf{E}^* \left[\frac{\phi^i S_1^i}{1+r} \right] = \mathbf{E}^* \left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r} \right] > 0\,.$$

□

Dokaz drugog smjera je nešto složeniji, i trebat će nam sljedeći pomoćni rezultati iz linearne algebre.

Lema 2.7. (a) *Neka je $C \subset \mathbf{R}^n$ zatvoren i konveksan skup takav da $0 \notin C$. Tada postoje linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ i $\alpha > 0$ takvi da je $\xi(x) \geq \alpha$ za sve $x \in C$. Specijalno, hiperravnina $\{x : \xi(x) = 0\}$ ne presijeca C.*

(b) *(teorem separacije) Neka je $K \subset \mathbf{R}^n$ kompaktan i konveksan, te neka je $V \subset \mathbf{R}^n$ vektorski potprostor takav da je $K \cap V = \emptyset$. Tada postoji linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ takav da vrijedi $\xi(x) > 0$ za sve $x \in K$, i $\xi(x) = 0$ za sve $x \in V$.*

Dokaz. (a) Neka je $r > 0$ takav da za zatvorenu kuglu radiju r oko ishodišta vrijedi $\overline{B(0,r)} \cap C \neq \emptyset$. Norma $\| \ \| : \overline{B(0,r)} \cap C \to \mathbf{R}$ je neprekidna funkcija i postiže minimum u $x_0 \in \overline{B(0,r)} \cap C$. Specijalno, $\|x\| \geq \|x_0\|$ za svaki $x \in C$. Budući da je C konveksan, za svaki $s \in [0,1]$ vrijedi

$$x_0 + s(x - x_0) = sx + (1-s)x_0 \in C.$$

Stoga je $\|x_0 + s(x - x_0)\| \geq \|x_0\|$, odnosno za sve $s \in [0,1]$ vrijedi

$$s^2 \|x - x_0\|^2 + 2s x_0 \cdot (x - x_0) \geq 0.$$

Odavde slijedi $x_0 \cdot x \geq \|x_0\|^2$ za sve $x \in C$. Definiramo $\xi(x) := x_0 \cdot x$ i $\alpha := \|x_0\|^2$.
(b) Definiramo skup $C := K - V = \{x \in \mathbf{R}^n : x = y - z, y \in K, z \in V\}$. Tada je C konveksan i zatvoren. Po (a) postoje linearan funkcional ξ i $\alpha > 0$ takvi da je $\xi(x) \geq \alpha$ za sve $x \in C$. To znači da za sve $y \in K$ i $z \in V$ vrijedi

$$\xi(y - z) = \xi(y) - \xi(z) \geq \alpha.$$

Fiksirajmo $y \in K$. Tada je $\xi(z) \leq \xi(y) - \alpha$ za sve $z \in V$. Budući da je V vektorski prostor, to povlači $\xi(z) = 0$ za sve $z \in V$. Slijedi $\xi(y) \geq \alpha > 0$ za sve $y \in K$. □

Primijetimo, nadalje, da se skup svih slučajnih varijabli na $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ može identificirati s vektorskim prostorom $\mathbf{R}^K$. Zaista, ako je X slučajna varijabla na Ω, možemo je identificirati s K-torkom $(X(\omega_1), \ldots, X(\omega_K)) \in \mathbf{R}^K$.

Dokaz. (nastavak dokaza Teorema 2.6)
$\Rightarrow$ Neka je $\mathcal{V} := \{V_1(\phi) \,:\, \phi \text{ portfelj takav da je } V_0(\phi) = 0\}$. Tada je $\mathcal{V}$ vektorski potprostor prostora svih slučajnih varijabli na Ω, te ga shvaćamo kao vektorski potprostor od $\mathbf{R}^K$. Neka je, nadalje, Γ skup svih pozitivnih slučajnih varijabli na Ω (X je pozitivna ako je $X(\omega) \geq 0$ za sve $\omega \in \Omega$ i postoji ω' takav da je $X(\omega') > 0$). Primijetimo da je Γ konveksan podskup od $\mathbf{R}^K$. Iz pretpostavke da tržište ne dopušta arbitražu slijedi da je $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$. Zaista, ako je ϕ portfelj takav da je $V_1(\phi) \in \mathcal{V} \cap \Gamma$, tada je ϕ arbitraža. Definirajmo $K := \{X \in \Gamma \,:\, \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1\}$. Tada je $K \subset \Gamma$ konveksan i kompaktan skup za koji vrijedi $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 2.7 (b)), postoji $\lambda = (\lambda(\omega) \,:\, \omega \in \Omega)$ takav da vrijedi:

(i) $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$ za sve $X \in K$,
(ii) $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) V_1(\phi)(\omega) = 0$ za svaki portfelj ϕ takav da je $V_0(\phi) = 0$.

Iz svojstva (i) slijedi da je $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ (zaista, dovoljno je uzeti X tako da je $X(\omega) = 1$ i $X(\omega') = 0$ za sve ostale ω'). Definiramo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ formulom:

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} .$$

Zbog $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ slijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$. Ostaje pokazati da je $\mathbb{P}^*$ martingalna mjera. Neka je $\phi = (\phi^0, \phi^1, 0, \ldots, 0)$ portfelj takav da je $0 = V_0(\phi) = \phi \cdot S_0 = \phi^0 + \phi^1 S_0^1$. Uočimo da je tada $S_0^1 = -\phi^0/\phi^1$. Po (ii) imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)(\phi \cdot S_1)(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \left(\phi^0(1+r) + \phi^1 S_1^1(\omega)\right) \\ &= \phi^0(1+r) \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) + \phi^1 \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) S_1^1(\omega) \end{aligned}$$

Podijelimo sa $\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')$. Slijedi:

$$0 = \phi^0(1+r) + \phi^1 \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^*(\{\omega\}) S_1^1(\omega) .$$

Odavde dobivamo

$$\frac{1}{1+r} \sum_{\omega \in \Omega} S_1^1(\omega) \mathbf{P}^*(\{\omega\}) = -\frac{\phi^0}{\phi^1} = S_0^1 ,$$

odnosno

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{S_1^1}{1+r} \right] = S_0^1 .$$

Na isti način odabirom odgovarajućeg portfelja pokaže se da je

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{S_1^i}{1+r} \right] = S_0^i , \ i = 1, \ldots, d .$$

Dakle, $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$. □

U dokazu smo uveli linearni prostor $\mathcal{V} := \{V_1(\phi) \,:\, \phi \text{ portfelj takav da je } V_0(\phi) = 0\}$. Neka je

$$\mathcal{W} := \{V_1(\phi) \,:\, \phi \text{ portfelj}\}$$

linearni prostor svih isplata koje se mogu generirati pomoću nekog portfelja. Uočimo da je $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Slučajne varijable iz $\mathcal{W}$ nazivat ćemo **dostižnim isplatama**. Definirajmo preslikavanje

$\pi : \mathcal{W} \to \mathbf{R}$ na sljedeći način: za $W = \phi \cdot S_1 \in \mathcal{W}$ neka je

$$\pi(W) := \mathbf{E}^* \left[\frac{W}{1+r} \right] = \mathbf{E}^* \left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r} \right] . \tag{2.2}$$

Ovdje je $\mathbf{E}^*$ očekivanje s obzirom na $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$. Realan broj $\pi(W)$ zovemo **cijena** od W. Uočimo da je π linearan funkcional na potprostoru $\mathcal{W}$: ako su $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$, te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, tada je

$$\pi(\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2) = \alpha_1 \pi(W_1) + \alpha_2 \pi(W_2) .$$

Primijetimo nadalje da ako je $W = \phi \cdot S_1$, tada je $\pi(W) = \phi \cdot S_0$. Zaista, to slijedi iz

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* \left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r} \right] &= \mathbf{E}^* \left[\frac{\sum_{i=0}^d \phi^i S_1^i}{1+r} \right] \\ &= \sum_{i=0}^d \phi^i \mathbf{E}^* \left[\frac{S_1^i}{1+r} \right] \\ &= \sum_{i=0}^d \phi^i S_0^1 , \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (2.1). Specijalno, cijena od W ne ovisi o portfelju koji generira W (u principu može biti više takvih portfelja). Štoviše, cijena $\pi(W)$ ne ovisi o martingalnoj mjeri $\mathbf{P}^*$ po kojoj se računa očekivanje.

Uočimo da su $S_1^i \in \mathcal{W}$. Zaista, dovoljno je izabrati portfelj ϕ takav da je $\phi^i = 1$, te $\phi^j = 0$ za sve $j \neq i$. U tom slučaju imamo da je cijena od S_1^i jednaka

$$\pi(S_1^i) = \mathbf{E}^* \left[\frac{S_1^i}{1+r} \right] = S_0^i .$$

2.3. **Izvedene vrijednosnice.** Na stvarnim financijskim tržištima se uz primarne financijske imovine još trži i vrijednosnicama čija isplata ovisi (najčešće na nelinearan način) o primarnim imovinama $S^0, S^1, \ldots, S^d$. Takve vrijednosnice nazivaju se izvedenim vrijednosnicama, opcijama ili slučajnim zahtjevima.

Definicija 2.8. Slučajni zahtjev (*contingent claim*) je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ takva da je

$$0 \leq C < \infty \quad \mathbf{P} - \text{g.s.}$$

Slučajni zahtjev C zove se **izvedenica** (*derivative*) primarnih imovina $S^0, S^1, \ldots, S^d$ ako je C funkcija od S_1, odnosno ako postoji (Borelova) funkcija $f : \mathbf{R}^{d+1} \to [0, \infty)$ takva da je

$$C = f(S_1^0, S_1^1, \ldots, S_1^d) .$$

Primjer 2.9. U *forward* ugovoru jedan agent pristaje prodati drugom agentu neku financijsku imovinu u trenutku $t = 1$ po cijeni K koja je specificirana u trenutku 0. Prema tome, vlasnik forward ugovora na i-tu financijsku imovinu dobiva razliku između stvarne tržišne cijene S_1^i i **dostavne cijene** (*delivery price*) K u slučaju da je $S_1^i > K$. Obratno, ako je $S_1^i < K$, tada vlasnik forward ugovora gubi iznos $K - S_1^i$. Prema tome, forward ugovor odgovara slučajnoj isplati

$$C^{\text{fw}} = S_1^i - K .$$

Primjer 2.10. Call i put opcija su standardni primjeri izvedenica na tržištu. **Call opcija** na i-tu imovinu je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne obavezu, na kupovinu i-te imovine u trenutku 1 za fiksnu cijenu K, koja se naziva **cijena izvršenja**. To odgovara slučajnoj isplati oblika

$$C^{\text{call}} = (S_1^i - K)^+ = \begin{cases} S_1^i - K & \text{ako je } S_1^i > K\,, \\ 0 & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Obratno, **put opcija** daje pravo, ali ne obavezu, na prodaju imovine u trenutku 1 po cijeni izvršenja K. To odgovara slučajnoj isplati oblika

$$C^{\text{put}} = (K - S_1^i)^+ = \begin{cases} K - S_1^i & \text{ako je } K > S_1^i\,, \\ 0 & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Call i put opcija s istom cijenom izvršenja K povezani su relacijom

$$C^{\text{call}} - C^{\text{put}} = S_1^i - K\,.$$

Pretpostavimo da su u promatranom modelu tržišta C^{call} i C^{put} dostižne isplate. Tada možemo promatrati cijene $\pi(C^{\text{call}})$ i $\pi(C^{\text{put}})$ tih opcija, dane jednadžbom (2.2). Iz linearnosti funkcionala cijene π i iz gornje relacije slijedi da je

$$\pi(C^{\text{call}}) - \pi(C^{\text{put}}) = S_0^i - \frac{K}{1+r}\,. \tag{2.3}$$

Ta jednakost naziva se **call - put paritet**.

Primjer 2.11. Podsjetimo se, s $\mathcal{W}$ smo označili familiju svih dostižnih isplata na tržištu i ustvrdili smo da je cijena i-te dionice S_1^i dostižna isplata. Uočimo da, uz klasične call i put opcije na jednu od dionica, ima smisla promatrati opcije na vrijednost $W = \phi \cdot S_1 \in \mathcal{W}$ portfelja nekoliko rizičnih imovina. Takve opcije se ponekad nazivaju **košare** (*basket option*). Na primjer, košara može biti oblika $(W - K)^+$.

Sada nam je cilj odrediti cijenu slučajnog zahtjeva C uz fundamentalnu pretpostavku da model tržišta ne dopušta arbitražu. Uočimo da na slučajni zahtjev C možemo gledati kao na novi financijski instrument na tržištu koji se u trenutku $t = 0$ prodaje za neku cijenu π^C. Preciznije, na C gledamo kao na $d+2$-gu imovinu S^{d+1} za koju vrijedi

$$S_0^{d+1} = \pi^C \quad \text{i} \quad S_1^{d+1} = C\,. \tag{2.4}$$

Želimo odrediti cijenu π^C tog novog instrumenta tako da na tržište **ne** uvodimo arbitražu. Drugim riječima, želimo da model tržišta koji se sastoji od $d+1$ primarne imovine i slučajnog zahtjeva C i dalje bude bez arbitraže. Pri tome implicitno pretpostavljamo da uvođenje slučajnog zahtijeva C na tržište kao nove imovine **ne** utječe na cijenu postojećih primarnih imovina.

Definicija 2.12. Realni broj $\pi^C \geq 0$ zove se **ne-arbitražna cijena** (*arbitrage-free price*) slučajnog zahtjeva C ako je model tržišta proširen pomoću (2.4) bez arbitraže. Skup svih ne-arbitražnih cijena od C označava se sa $\Pi(C)$. Donju i gornju među od $\Pi(C)$ označavamo sa

$$\pi^{\downarrow}(C) := \inf \Pi(C) \quad \text{i} \quad \pi^{\uparrow}(C) := \sup \Pi(C)\,.$$

Sljedeći rezultat opravdava definiciju cijene π relacijom (2.2).

Teorem 2.13. *Pretpostavimo da je skup $\mathcal{P}$ ekvivalentnih martingalnih mjera za originalno tržište neprazan. Tada su ne-arbitražne cijene slučajnog zahtjeva C dane s*

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] : \mathbf{P}^* \in \mathcal{P} \right\} . \tag{2.5}$$

Nadalje, slijedi da su donja i gornja ograda od $\Pi(C)$ dane s

$$\pi^{\downarrow}(C) = \inf_{\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] \quad i \quad \pi^{\uparrow}(C) = \sup_{\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] .$$

Dokaz. Pokažimo prvo inkluziju $\Pi(C) \subset \left\{ \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] : \mathbf{P}^* \in \mathcal{P} \right\}$. Neka je $\pi^C \in \Pi(C)$ ne-arbitražna cijena od C i imovina S^{d+1} određena s (2.4). Kako prošireni model tržišta koji se sastoji od imovina $S^0, ..., S^d, S^{d+1}$ i dalje ne dopušta arbitražu, možemo na njega primijeniti Teorem (2.6). Prema tome, postoji ekvivalentna martingalna mjera $\widehat{\mathbf{P}}$ na proširenom modelu tržišta, tj. vrijedi

$$S_0^i = \widehat{\mathbf{E}} \left[\frac{S_1^i}{1+r} \right] \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, d \tag{2.6}$$

$$\pi^C = \widehat{\mathbf{E}} \left[\frac{C}{1+r} \right] . \tag{2.7}$$

Iz (2.6) je očito $\widehat{\mathbf{P}}$ ujedno i ekvivalentna martingalna mjera na početnom tržištu, odnosno $\widehat{\mathbf{P}} \in \mathcal{P}$. Prema tome, iz (2.7) slijedi da je π^C sadržana u desnoj strani od (2.5).

Obratno, neka je

$$\pi^C = \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right]$$

za neki $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$. Tada je po definiciji martingalne mjere, $\mathbf{P}^*$ ujedno i martingalna mjera za prošireno tržište (zadovoljava (2.6) i (2.7)). Sada po Teoremu (2.6) slijedi da na proširenom tržištu ne postoji arbitraža, što znači da je $\pi^C \in \Pi(C)$. Konačno, formule za $\pi^{\downarrow}(C)$ i $\pi^{\uparrow}(C)$ slijede direktno iz (2.5). □

Neka je $C \in \mathcal{W}$ dostižan slučajni zahtjev, odnosno

$$C \geq 0 \text{ i } C = V_1(\phi) = \phi \cdot S_1$$

za neki portfelj ϕ. Svaki takav portfelj ϕ zove se **replicirajući portfelj** za C. Uočimo da je C izvedenica, obzirom da ju možemo prikazati kao (linearnu) funkciju osnovnih imovina,

$$C = f(S_1^0, S_1^1, \dots, S_1^d), \;\; f(x) := \phi \cdot x.$$

Stoga, diskusija na kraju prethodnog potpoglavlja i prethodni teorem povlače da je nearbitražna cijena dostižnog slučajnog zahtjeva C jednaka upravo cijeni repliciranja $V_0(\phi) = \phi \cdot S_0$. Podsjetimo se, cijena $\pi(C) = \phi \cdot S_0$ je jedinstvena, odnosno ne ovisi o odabiru replicirajućeg portfelja.

Teorem 2.14. *Pretpostavimo da model tržišta ne dopušta arbitražu, te neka je C slučajan zahtjev.*

(a) *Ako je C dostižan, $C \in \mathcal{W}$, tada se skup $\Pi(C)$ ne-arbitražnih cijena od C sastoji od jedinstvenog elementa $V_0(\phi) = \phi \cdot S_0$, gdje je ϕ bilo koji replicirajući portfelj za C.*

(b) *Ako C nije dostižan, tada je $\pi^{\downarrow}(C) < \pi^{\uparrow}(C)$ i vrijedi*

$$\Pi(C) = \langle \pi^{\downarrow}(C), \pi^{\uparrow}(C) \rangle .$$

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je ϕ replicirajući portfelj za C, te neka je $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$. Tada je

$$\phi \cdot S_0 = \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] .$$

Podsjetimo se, ta jednakost nam govori sljedeće:

- Ako je $\psi \in \mathbf{R}^{d+1}$ neki drugi replicirajući portfelj za C, tada gornja formula vrijedi i za ψ. Specijalno, $\phi \cdot S_0 = \psi \cdot S_0$, što znači da lijeva strana u gornjoj jednakosti ne ovisi o replicirajućem portfelju.
- Budući da lijeva strana u gornjoj formuli ne ovisi o $\mathbf{P}^*$, to ta formula vrijedi za sve $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$. To znači da se skup na desnoj strani jednakosti (2.5) Teorema 2.13 sastoji od samo jednog elementa. Dakle, $\Pi(C) = \{\phi \cdot S_0\}$.

(b) Primijetimo da je skup $\mathcal{P}$ ekvivalentih martingalnih mjera konveksan: ako su $\mathbf{P}_1^*, \mathbf{P}_2^* \in \mathcal{P}$ i $\lambda \in [0,1]$, tada je $\mathbf{P}^* := \lambda \mathbf{P}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{P}_2^* \in \mathcal{P}$.[1] Zbog

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] = \lambda \mathbf{E}_1^* \left[\frac{C}{1+r} \right] + (1-\lambda) \mathbf{E}_2^* \left[\frac{C}{1+r} \right]$$

slijedi da je skup

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] \ : \ \mathbf{P}^* \in \mathcal{P} \right\}$$

konveksan. Jasno je da je $\Pi(C)$ omeđen i neprazan. Neprazan, konveksan i omeđen podskup od $\mathbf{R}$ je nužno interval. Preostaje, stoga, pokazati da je to otvoren interval. Neka je $\pi \in \Pi(C)$. Tvrdimo da postoje $\breve{\pi}$ i $\hat{\pi}$ u $\Pi(C)$ takvi da je $\breve{\pi} < \pi < \hat{\pi}$. Neka je $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ takva da je

$$\pi = \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] .$$

Po pretpostavi C nije dostižan, te je stoga $\{C\} \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 2.7 (b)) postoji linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$ takav da je

$$\xi(W) = 0 \text{ za sve } W \in \mathcal{W}, \quad \xi(C) > 0 . \tag{2.8}$$

Funkcional ξ je oblika $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K) \in \mathbf{R}^K$. Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$|\xi_j| \leq \frac{1}{2} \min\{\mathbf{P}^*(\{\omega_j\}) \, , j = 1,2,\ldots,K\} \tag{2.9}$$

(zaista, pomnožimo li ξ pozitivnom konstantom, (2.8) ostaje istinito). Primijetimo također da je zbog $1 \in \mathcal{W}$, $\sum_{i=1}^K \xi_i = \xi(1) = 0$.

Definirajmo mjeru $\hat{\mathbf{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ formulom:

$$\hat{\mathbf{P}}(\{\omega_j\}) := \mathbf{P}^*(\{\omega_j\}) + \xi_j \, , \quad j = 1,2,\ldots,K .$$

Iz (2.9) slijedi da je $\hat{\mathbf{P}}(\{\omega_j\}) > 0$ za sve $j = 1,2,\ldots,K$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^K \hat{\mathbf{P}}(\{\omega_j\}) &= \sum_{j=1}^K (\mathbf{P}^*(\{\omega_j\}) + \xi_j) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^K \xi_j = 1 . \end{aligned}$$

[1] Tvrdnju dokažite za vježbu sami.

Dakle, $\hat{\mathbf{P}}$ je vjerojatnosna mjera za koju vrijedi $\hat{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$.

Pokažimo da je $\hat{\mathbf{P}} \in \mathcal{P}$.Neka je Z slučajna varijabla na Ω. Tada je

$$\hat{\mathbf{E}}[Z] = \sum_{j=1}^{K} Z(\omega_j)\hat{\mathbf{P}}(\{\omega_j\}) = \mathbf{E}^*[Z] + \sum_{j=1}^{K} \xi_j Z(\omega_j) = \mathbf{E}^*[Z] + \xi(Z) \,. \tag{2.10}$$

Specijalno vrijedi $\hat{\mathbf{E}}[W] = \mathbf{E}^*[W]$ za sve $W \in \mathcal{W}$. Uzimanjem $W = S_1^i$, $i = 0, 1, \dots, d$, zaključujemo da je $\hat{\mathbf{P}} \in \mathcal{P}$, t.j., $\hat{\mathbf{P}}$ je ekvivalentna martingalna mjera. Primjenimo (2.10) sa $Z = C$. Slijedi:

$$\hat{\pi} := \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{\mathbf{E}^*[C] + \xi(C)}{1+r} > \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \pi \,.$$

To znači da je $\hat{\pi}$ ne-arbitražna cijena strogo veća od π.

Definirajmo sada mjeru $\check{\mathbf{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ formulom:

$$\check{\mathbf{P}}(\{\omega_j\}) := \mathbf{P}^*(\{\omega_j\}) - \xi_j \,, \quad j = 1, 2, \dots, K \,.$$

Na isti način kao gore provjeri se da je $\check{\mathbf{P}} \in \mathcal{P}$, te da je

$$\check{\pi} := \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{\mathbf{E}^*[C] - \xi(C)}{1+r} < \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \pi \,,$$

odnosno $\check{\pi}$ je ne-arbitražna cijena strogo manja od π. □

2.4. **Potpuni modeli tržišta.** Najjednostavniji modeli tržišta bez arbitraže su oni u kojima su svi slučajni zahtjevi dostižni.

Definicija 2.15. Model tržišta bez arbitraže je **potpun** ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.

Teorem 2.16. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera, t.j. ako je $|\mathcal{P}| = 1$. U tom slučaju nužno vrijedi $K \leq d + 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je model potpun. Tada je za svaki $A \in \mathcal{F}$, indikator 1_A dostižan slučajan zahtjev. Tada je po Teoremu 2.14, $\mathbf{P}^*[A] = \mathbf{E}^*[1_A]$ neovisno o $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ (jer je $\Pi(1_A)$ jednočlan skup). Specijalno, uz $A = \{\omega\}$, $\mathbf{P}^*(\{\omega\})$ je jednako za sve $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$, za sve $\omega \in \Omega$. Ali to je moguće samo ako $\mathcal{P}$ sadrži jedinstven element.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}^*\}$. Neka je C slučajan zahtjev. Po Teoremu 2.13, C ima jedinstvenu ne-arbitražnu cijenu danu sa $\mathbf{E}^*[C/(1 + r)]$. Sada iz Teorema 2.14 (b) slijedi da je C dostižan (u suprotnom bi $\Pi(C)$ bio otvoren interval što je u suprotnosti s činjenicom da je $\Pi(C)$ točka).

Sada dokazujemo da je $K \leq d+1$. Slučajni zahtjev je slučajna varijabla na $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$. Slučajne varijable na Ω tvore vektorski prostor koji identificiramo s $\mathbf{R}^K$. Budući da je svaki slučajni zahtjev dostižan, to je vektorski prostor slučajnih zahtjeva jednak vektorskom prostoru $\mathcal{W}$ svih dostižnih isplata. Svaka dostižna isplata generirana je nekim portfeljom $\phi \in \mathbf{R}^{d+1}$. Preslikavanje koje portfelju ϕ pridružuje dostižnu isplatu $\phi \cdot S_1$ je linearno preslikavanje na koje gledamo kao na preslikavanje sa $\mathbf{R}^{d+1}$ na $\mathbf{R}^K$. Po pretpostavci da je svaki slučajni zahtjev dostižan, to preslikavanje je surjekcija. Stoga je dimenzija vektorskog prostora portfelja veća ili jednaka dimenziji vektorskog prostora slučajnih zahtjeva. Dakle, $d + 1 \geq K$. □

2.5. **Rizik i povrat.**

Definicija 2.17. Neka je $W \in \mathcal{W}$ dostižna isplata takva da je $\pi(W) \neq 0$. Tada se **povrat** od W definira kao

$$R(W) := \frac{W - \pi(W)}{\pi(W)}.$$

Izračunajmo povrat nerizične imovine S^0:

$$R(S_1^0) = \frac{S_1^0 - \pi(S_1^0)}{\pi(S_1^0)} = \frac{(1+r)-1}{1} = r\,,$$

što je kamatna stopa na nerizičnu imovinu. Nadalje računamo očekivani povrat rizičnih imovina uz $\mathbf{P}^*$ - mjeru neutralnu na rizik:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*[R(S_1^i)] &= \mathbf{E}^*\left[\frac{S_1^i - \pi(S_1^i)}{\pi(S_1^i)}\right] \\ &= \frac{\mathbf{E}^*[S_1^i]}{S_0^i} - 1 \\ &= (1+r) - 1 = r\,, \end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz (2.1). Ovaj račun daje još jedno objašnjenje naziva mjera neutralna na rizik. Primijetimo da bi očekivani povrat rizične imovine uz objektivnu mjeru $\mathbf{P}$ trebao biti veći od r - povrata na nerizičnu imovinu.

Pretpostavimo sada da je dostižna isplata $W \in \mathcal{W}$ linearna kombinacija $W = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_k$ (ne-nul) dostižnih isplata W_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Želimo izračunati povrat od W. Prvo uočimo da je $\pi(W) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \pi(W_k)$ zbog linearnosti od π. Zato je

$$\begin{aligned} R(W) &= \frac{W - \pi(W)}{\pi(W)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k W_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k \pi(W_k)}{\pi(W)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k (W_k - \pi(W_k))}{\pi(W)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \pi(W_k)}{\pi(W)} \frac{W_k - \pi(W_k)}{\pi(W_k)} \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_k R(W_k)\,, \end{aligned}$$

gdje smo uveli koeficijente

$$\beta_k = \frac{\alpha_k \pi(W_k)}{\pi(W)} = \frac{\alpha_k \pi(W_k)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(W_i)}\,, k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Koeficijente β_k interpretiramo kao omjer koji je investiran u W_k.

Specijalan slučaj gornje formule dobijemo u slučaju kada je $n = d+1$ i $W_k = S_1^k$, odnosno za dostižnu isplatu $W = \phi \cdot S_1 = \sum_{i=0}^d \phi^i S_1^i$. Tada je

$$R(W) = \sum_{i=0}^d \frac{\phi^i S_0^i}{\phi \cdot S_0} R(S_1^i)\,.$$

Neka je $\mathbf{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera. Definiramo slučajnu varijablu L formulom

$$L(\omega) := \frac{\mathbf{P}^*(\{\omega\})}{\mathbf{P}(\{\omega\})}\,, \quad \omega \in \Omega\,.$$

Slučajna varijabla L naziva se *state price density*. Primijetimo da vrijedi sljedeća jednostavna formula: neka je Z slučajna varijabla na Ω. Tada je

$$\mathbf{E}^*[Z] = \sum_\omega Z(\omega)\mathbf{P}^*(\{\omega\}) = \sum_\omega Z(\omega)L(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{E}[LZ]\,. \tag{2.11}$$

Jednostavna posljedica je formula $\mathbf{E}[L] = \mathbf{E}^*[1] = 1$. Pomoću formule (2.11) računamo kovarijancu slučajnih varijabli $R(W)$ i L:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(L, R(W)) &= \mathbf{E}[LR(W)] - \mathbf{E}[L]\mathbf{E}[R(W)] \\ &= \mathbf{E}^*[R(W)] - \mathbf{E}[R(W)] \\ &= r - \mathbf{E}[R(W)]\,. \end{aligned}$$

Formulirajmo gornja razmatranja u sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.18. *Pretpostavimo da je $\mathbf{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera, te neka je $W \in \mathcal{W}$ dostižna isplata takva da je $\pi(W) \neq 0$. Tada vrijedi sljedeće:*

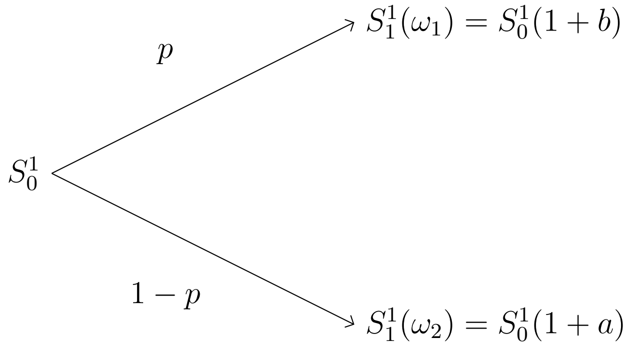
$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*[R(W)] &= r \\ \mathbf{E}[R(W)] &= r - Cov(L, R(W))\,. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.19. Najjednostavniji model koji smo već susreli ima samo dva elementarna događaja: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Vjerojatnost $\mathbf{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dana je s $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = p \in (0,1)$. Pretpostavljamo da tržište ima jednu rizičnu imovinu, te da vrijedi

$$S_1^1(\omega_1) = S_0^1(1+b)\,, \qquad S_1^1(\omega_2) = S_0^1(1+a)\,,$$

gdje je $-1 \leq a < b$.



Za nerizičnu imovinu vrijedi $S_0^0 = 1$, $S_1^0 = 1 + r$, gdje je $r \geq 0$ kamatna stopa na tržištu. Neka je $\mathbf{P}^*$ druga vjerojatnosna mjera na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ i $p^* = \mathbf{P}^*(\{\omega_1\}) \in (0,1)$. Tada je $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ ako i samo ako je

$$S_0^1(1+r) = \mathbf{E}^*[S_1^1] = S_0^1(1+b)p^* + S_0^1(1+a)(1-p^*)\,,$$

odnosno

$$1 + r = (1+b)p^* + (1+a)(1-p^*)\,.$$

Jedinstveno rješenje gornje jednadžbe je

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}\,.$$

Stoga, da bi dodatno $\mathbb{P}^*$ bila vjerojatnosna mjera ekvivalentna s $\mathbf{P}$ nužno je i dovoljno da vrijedi

$$p^* \in (0,1) \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{r-a}{b-a} < 1 \;\Leftrightarrow\; a < r < b. \tag{2.12}$$

Uočimo da je uz taj uvjet ekvivalentna martingalna mjera i jedinstvena. Dakle, po Teoremu 2.16 model tržišta je potpun.

Promotrimo sada neki slučajni zahtjev $C : \Omega \to \mathbf{R}_+$. Kako je uz (2.12) tržište potpuno, slijedi da je C dostižan. Tada za svaki replicirajući portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ za C vrijedi

$$C(\omega) = \phi^0 S_1^0(\omega) + \phi^1 S_1^1(\omega) = \phi^0(1+r) + \phi^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \Omega\,.$$

Uočimo da iz gornje relacije dobivamo sustav od dvije jednadžbe (za $\omega = \omega_1$ i $\omega = \omega_2$) s dvije nepoznanice, ϕ^0 i ϕ^1. Rješenje sustava dano je s

$$\phi^0 = \frac{C(\omega_2)(1+b) - C(\omega_1)(1+a)}{(b-a)(1+r)} \quad \text{i} \quad \phi^1 = \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{S_0^1(b-a)}\,. \tag{2.13}$$

Po Teoremu 2.14, slijedi da je jedinstvena ne-arbitražna cijena slučajnog zahtjeva C dana s

$$\begin{aligned}
\pi(C) &= V_0(\phi) = \phi \cdot S_0 = \phi^0 + \phi^1 S_0^1 \\
&= \frac{C(\omega_2)(1+b) - C(\omega_1)(1+a)}{(b-a)(1+r)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{b-a} \\
&= \frac{C(\omega_2)(b-r) + C(\omega_1)(r-a)}{(1+r)(b-a)}\,.
\end{aligned}$$

Primijetimo da smo gornjim računom dali i drugi dokaz potpunosti tržišta. Naime, za proizvoljan slučajni zahtjev C smo našli replicirajući portfelj određen s (2.13). Time smo pokazali da je svaki slučajni zahtjev dostižan.

Uočimo da smo jedinstvenu ne-arbitražnu cijenu mogli odrediti i pomoću ekvivalentne martingalne mjere $\mathbf{P}^*$:

$$\begin{aligned}
\pi(C) &= \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{C(\omega_1)}{1+r}p^* + \frac{C(\omega_2)}{1+r}(1-p)^* \\
&= \frac{C(\omega_1)}{1+r}\frac{r-a}{b-a} + \frac{C(\omega_2)}{1+r}\frac{b-r}{b-a}\,.
\end{aligned}$$

Neka je sada $C = (S_1^1 - K)^+$ call-opcija sa cijenom izvršenja $K \in [S_0^1(1+a), S_0^1(1+b)]$. Slijedi da je cijena te call opcije jednaka

$$\pi((S_1^1 - K)^+) = \frac{S_0^1(1+b) - K}{1+r}\frac{r-a}{b-a} = \frac{S_0^1(1+b) - K}{b-a}\left(1 - \frac{1+a}{1+r}\right)\,. \tag{2.14}$$

Uočimo da cijena opcije *ne* ovisi o p, te da je rastuća funkcija kamatne stope r. S druge strane, očekivanje (uz vjerojatnost $\mathbf{P}$) diskontirane vrijednosti opcije jednako je

$$\mathbf{E}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{S_0^1(1+b) - K}{1+r} \cdot p\,,$$

što je padajuća funkcija od r, i rastuća funkcija od p.

Sada ćemo ilustrirati kako opcije mogu modificirati rizik financijske pozicije. Pretpostavimo da je $S_0^1 = 100$, $S_1^1(\omega_1) = 120$ (t.j. $b = 0.2$), $S_1^1(\omega_2) = 90$ ($a = -0.1$), te $r = 0.03$. Povrati na rizičnu imovinu iznose

$$R(S_1^1)(\omega_1) = +20\% \quad \text{ili} \quad R(S_1^1)(\omega_2) = -10\%\,.$$

Pogledajmo sada call opciju $C = (S_1^1 - K)^+$ sa cijenom izvršenja $K = 100$. Po formuli (2.14), cijena te opcije je

$$\pi(C) = \frac{120 - 100}{1.03}\frac{0.13}{0.3} \approx 8.41\,.$$

Stoga je povrat

$$R(C) = \frac{(S_1^1 - K)^+ - \pi(C)}{\pi(C)}$$

na početnu investiciju $\pi(C) \approx 8.41$ jednak

$$R(C)(\omega_1) = \frac{20 - \pi(C)}{\pi(C)} \approx +138\%\,,$$

$$R(C)(\omega_2) = \frac{0 - \pi(C)}{\pi(C)} \approx -100\%\,.$$

U usporedbi sa $+20\%$ i -10%, to je izuzetno velik porast mogućnosti ostvarivanja profita i rizika. To se ponekad zove **efekt poluge** (*leverage effect*).

Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ posjeduje jednu dionicu, te želi smanjiti rizik od potencijalnog pada njene cijene. To može učiniti tako da kupi određen broj, označimo ga s ψ, put opcija (s cijenom izvršenja $K = 100$) na tu dionicu. Tada je njegova nova pozicija u trenutku $t = 1$ jednaka

$$\widetilde{C} := \psi(K - S_1^1)^+ + S_1^1\,.$$

Odredimo cijenu slučajnog zahtjeva $\widetilde{C}$, odnosno takvog portfelja. Cijena put opcije u trenutku $t = 0$ je po put call paritetu (2.3) jednaka

$$\pi(C^{\text{put}}) = \pi(C^{\text{call}}) - S_0^1 + \frac{K}{1+r} \approx 5.50\,.$$

Stoga je $\pi(\widetilde{C}) \approx 5.50\psi + 100$. Izračunajmo povrat na $\widetilde{C}$:

$$R(\widetilde{C})(\omega_1) \approx \frac{0 + 120 - 5.50\psi - 100}{5.50\psi + 100} = \frac{20 - 5.50\psi}{5.50\psi + 100}\,,$$

$$R(\widetilde{C})(\omega_2) \approx \frac{10\psi + 90 - 5.50\psi - 100}{5.50\psi + 100} = \frac{4.50\psi - 10}{5.50\psi + 100}\,.$$

Za $\psi = 1$ (jedna put opcija) dobijemo:

$$R(\widetilde{C})(\omega_1) \approx +13.7\%\,, \quad \text{i} \quad R(\widetilde{C})(\omega_2) \approx -5.2\%\,.$$

Za $\psi = 2$ (dvije put opcije) dobijemo:

$$R(\widetilde{C})(\omega_1) \approx +8.1\%\,, \quad \text{i} \quad R(\widetilde{C})(\omega_2) \approx -0.9\%\,.$$

3. Višeperiodni modeli u diskretnom vremenu - dinamički modeli

3.1. **Opis modela: imovine, strategije i arbitraža.** U ovom poglavlju proširujemo model iz prethodnog poglavlja na konačno mnogo vremenskih perioda. Financijskom imovinom trži se u trenucima $t = 0, 1, \ldots, T$. Kao i do sada, financijski model gradit ćemo na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je prostor elementarnih događaja konačan - $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$.

Za σ-algebru $\mathcal{F}$ uzimamo partitivni skup od Ω: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. I dalje pretpostavljamo da su svi elementarni događaji mogući: $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$.

Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dan nam je i neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. Takvu familiju σ-algebri $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T\}$ zovemo **filtracija**. O σ-algebri $\mathcal{F}_t$ mislimo kao o informaciji o stanju svijeta koja nam je dostupna u trenutku t. Kako vrijeme prolazi, informacija se povećava otkud uvjet o neopadajućoj familiji. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ- algebra, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, t.j., u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju o mogućem stanju svijeta. Također ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, t.j., na kraju imamo potpunu informaciju.

Kao i u prethodnom poglavlju, financijsko tržište sastoji se od $d+1$ financijske imovine. Cijenu i-te financijske imovine u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ označavamo sa S_t^i. Dakle, gornji indeks označava o kojoj se imovini radi, dok donji indeks pokazuje vremenski trenutak. Cijene financijskih imovina općenito su slučajne, te ćemo stoga pretpostaviti da su S_t^i slučajne varijable. Prirodno je pretpostaviti da cijena S_t^i ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t, odnosno o informaciji do trenutka t. Matematički to formuliramo tako da ćemo pretpostaviti da je slučajna varijabla S_t^i izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$. To znači da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\{S_t^i \le x\} \in \mathcal{F}_t$$

(ekvivalentno, $\{S_t^i < x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S_t^i \ge x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S_t^i > x\} \in \mathcal{F}_t$). Dakle, hoće li cijena od S^i u trenutku t biti veća (manja) od x ovisi samo o događajima do trenutka t. Označimo s $S_t := (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$ vektor cijena svih imovina u trenutku t. Tada je $S_t : \Omega \to \mathbf{R}^{d+1}$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriv slučajni vektor.

Definicija 3.1. Slučajni proces $X = (X_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ je **adaptiran** u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ ako je za svaki $t = 0, 1, \ldots, T$, slučajna varijabla (vektor) X_t izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.

Kao i u prvom poglavlju pretpostavljamo da je 0-ta financijska imovina nerizična (npr., novac u banci). Stavljamo $S_0^0 = 1$, te zbog jednostavnosti $S_t^0 = (1+r)^t$ (ukamaćivanje po stopi r).

Napomena 3.2. Pojam nerizične imovine može se poopćiti, tako da S_t^0 ne bude nužno degenerirana slučajna varijabla. Općenito možemo pretpostaviti da je 0-ta imovina lokalno nerizična. To znači da u trenutku $t-1$ znamo njenu vrijednost u trenutku t, $t = 1, 2, \ldots, T$. Formalno, to znači da je S_t^0 $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva.

Uvedimo oznaku $\beta_t := 1/S_t^0$. Koeficijent β_t interpretiramo kao diskontni faktor od vremena t do vremena 0: ako u trenutku $t = 0$ uložimo u banku β_t kuna, u trenutku t imat ćemo točno 1 kunu. Imovine indeksirane s $i = 1, 2, \ldots, d$ su rizične.

Nakon što smo uveli financijski model, objasnimo kako se u modelu trguje. U slučaju jednoperiodnog modela, u trenutku $t = 0$ investirali bismo u financijske imovine tako da stvorimo portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$. Prisjetimo se, ϕ^i označava broj jedinica i-te imovine. Označimo sada ϕ sa ϕ_1: $\phi_1 = (\phi_1^0, \phi_1^1, \ldots, \phi_1^d)$. U trenutku $t = 1$, dopušteno nam je rebalansirati portfelj i zamijeniti ga nekim drugim portfeljom koji označimo s $\phi_2 = (\phi_2^0, \phi_2^1, \ldots, \phi_2^d)$. O čemu će ovisiti taj novi portfelj? O cijenama financijskih imovina u trenutku $t = 1$. Budući da su te cijene slučajne, i to tako da su $\mathcal{F}_1$ izmjerive, to će općenito i portfelj ϕ_2 biti $\mathcal{F}_1$-izmjeriv slučajni vektor u $\mathbf{R}^{d+1}$. U trenutku $t = 2$ saznamo nove cijene S_2^i, te rebalansiramo portfelj, itd.

Definicija 3.3. Slučajni proces $X = (X_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ je **predvidiv** u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ ako je za svaki $t = 1, \ldots, T$, slučajna varijabla (vektor) X_t izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{t-1}$, te ako je X_0 izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_0$.

Definicija 3.4. Strategija trgovanja (ili dinamički portfelj) je predvidiv slučajni proces $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \ldots, \phi_t^d), t = 1, 2, \ldots, T)$ s vrijednostima u $\mathbf{R}^{d+1}$. **Vrijednost portfelja** u trenutku $t = 1, 2, \ldots, T$ je slučajna varijabla

$$V_t(\phi) := \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i\,.$$

Primijetimo da je $V_t(\phi)$ izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle, $V(\phi) = (V_t(\phi)\,,\, t = 1, 2, \ldots, T)$ je adaptiran slučajni proces.

Po definiciji je vrijednost portfelja u trenutku t jednaka vrijednosti nakon što se saznaju cijene imovina u trenutku t, a prije rebalansa portfelja. Primijetimo da nismo definirali vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$. Po definiciji stavljamo $V_0(\phi) := \phi_1 \cdot S_0$. Ta definicija nije formalno u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \ldots, T$. Alternativno, možemo definirati portfelj u trenutku $t = 0$ formulom $\phi_0 = \phi_1$. Tada možemo staviti $V_0(\phi) = \phi_0 \cdot S_0$ što je u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \ldots, T$. Od sada nadalje koristimo konvenciju da je $\phi_0 = \phi_1$.

Osim stvarnih vrijednosti financijskih imovina i portfelja zanimat će nas i njihove diskontirane vrijednosti (t.j., svedene na sadašnju vrijednost). Kao i do sada, diskontirane vrijednosti ćemo uvijek označavati tildom$\,\widetilde{}\,$:

$$\widetilde{S}_t^i := \beta_t S_t^i = \frac{1}{(1+r)^t} S_t^i\,.$$

Uočimo da je $\widetilde{S}_t^0 = 1$. Diskontirana vrijednost portfelja u trenutku $t = 1, 2, \ldots, T$ je slučajna varijabla

$$\widetilde{V}_t(\phi) := \beta_t V_t(\phi) = \phi_t \cdot \widetilde{S}_t\,.$$

Definicija 3.5. Strategija ϕ je **samofinancirajuća** ako za sve $t = 0, 1, \ldots, T-1$ vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t\,. \tag{3.1}$$

Gornju definiciju interpretiramo na sljedeći način:

- u trenutku t saznamo cijene $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d$ i vrijednost portfelja (strategije) postaje $\phi_t \cdot S_t$;
- prilagođavamo svoju financijsku poziciju tako da biramo novi portfelj ϕ_{t+1} i to tako da sredstva za kupovinu tog novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti portfelja ϕ_t koja je $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$;
- dakle, vrijednost (u trenutku t) novog portfelja ϕ_{t+1}, koja je $\phi_{t+1} \cdot S_t$, mora biti jednaka vrijednosti starog portfelja ϕ_t koja je $\phi_t \cdot S_t$.

. .

Napomena 3.6. Jednakost (3.1) ekvivalentna je sa

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = \phi_{t+1} \cdot S_{t+1} - \phi_t \cdot S_t\,,$$

odnosno

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = V_{t+1}(\phi) - V_t(\phi)\,. \tag{3.2}$$

Desna strana je razlika vrijednosti portfelja ϕ u trenucima $t+1$ i t. Lijeva strana je dobitak (gubitak) ostvaren promjenom cijena od trenutka t do trenutka $t+1$. Dakle, strategija je samofinancirajuća ako i samo ako je dobitak (gubitak) ostvaren samo promjenom cijena financijskih imovina (a ne, npr., dodatnim investiranjem ili povlačenjem novca iz portfelja - konzumacija).

Uvedimo oznaku za razliku cijena financijskih imovina u trenucima $t-1$ i t:

$$\Delta S_t := S_t - S_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

te za ukupni dobitak (gubitak) do trenutka t:

$$G_t(\phi) := \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j\,.$$

Tada je $G(\phi) = (G_t(\phi)\,,\, t = 1, 2, \ldots, T)$ adaptiran slučajni proces koji zovemo **proces dobitka**.

Propozicija 3.7. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *Strategija ϕ je samofinancirajuća.*

(ii) *Za sve $t = 1, 2, \ldots, T$ vrijedi*

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)\,.$$

(iii) *Za sve $t = 1, 2, \ldots, T$ vrijedi*

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \widetilde{G}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta\widetilde{S}_j\,.$$

Dokaz. Iz Napomene 3.6, ϕ je samofinancirajuća ako i samo ako vrijedi jednakost (3.2).
(i)$\Rightarrow$ (ii) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t}(V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j$.
(ii)$\Rightarrow$ (i) Iz $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j$ za sve $t = 1, 2, \ldots, T$, slijedi $V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi) = \phi_t \cdot \Delta S_t$.
(i)$\Leftrightarrow$(iii) Vrijedi $\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t$ ako i samo ako je $\phi_t \cdot \widetilde{S}_t = \phi_{t+1} \cdot \widetilde{S}_t$. Sada je dokaz isti kao dokaz ekvivalencije (i) i (ii). □

Propozicija 3.8. *Za svaki predvidiv proces $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d), 0 \le t \le T)$ i za svaku $\mathcal{F}_0$-izmjerivu slučajnu varijablu V_0 postoji jedinstven predvidiv proces $(\phi_t^0, 0 \le t \le T)$ takav da je strategija $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ samofinancirajuća i vrijedi $V_0(\phi) = V_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je ϕ samofinancirajuća i vrijedi $V_0(\phi) = V_0$. Tada iz Propozicije 3.7 i jednakosti $\Delta\widetilde{S}_j^0 = 1 - 1 = 0$ slijedi

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_t(\phi) &= V_0 + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta\widetilde{S}_j \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{t} (\phi_j^1 \Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta\widetilde{S}_j^d)\,. \end{aligned}$$

S druge strane vrijedi

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 \widetilde{S}_t^1 + \cdots + \phi_t^d \widetilde{S}_t^d \,.$$

Iz te dvije jednakosti slijedi da je ϕ_t^0 jedinstveno određen formulom

$$\begin{aligned}
\phi_t^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^{t} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) - \phi_t^1 \widetilde{S}_t^1 - \cdots - \phi_t^d \widetilde{S}_t^d \\
&= V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) - \phi_{t-1}^1 \widetilde{S}_{t-1}^1 - \cdots - \phi_{t-1}^d \widetilde{S}_{t-1}^d \,.
\end{aligned}$$

Definiramo li ϕ_t^0, $t = 1, \ldots, T$, gornjom formulom, (i dodatno $\phi_0^0 = \phi_1^0$), odmah se vidi da je strategija ϕ samofinancirajuća, te da je proces $(\phi_t^0, 0 \le t \le T)$ predvidiv. □

Gornja propozicija nam omogućava da samofinancirajuće strategije zadajemo predvidim nizom slučajnih vektora $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d)\,,\, 0 \le t \le T)$. Za danu početnu vrijednost portfelja V_0, taj predvidiv niz na jedinstven način definira samofinancirajuću strategiju.

Definicija 3.9. Strategija ϕ je **dopustiva**, ako je ϕ samofinancirajuća i vrijedi $V_t(\phi) \ge 0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$.

Uočimo da za $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, te $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ može vrijediti $\phi_t^i < 0$. U slučaju $\phi_t^0 < 0$ u trenutku t smo “kratki” nultu financijsku imovinu (t.j., dužni smo banci novac), dok $\phi_t^i < 0$, $i = 1, 2 \ldots, d$, znači da smo “kratki” za i-tu financijsku imovinu (short selling of stock). Međutim, bez obzira na takvu mogućnost, vrijednost portfelja (dopustive strategije) u svakom trenutku t mora biti nenegativna, odnosno investitor u svakom trenutku t mora moći isplatiti svoje eventualne dugove.

Definicija 3.10. Dopustiva strategija ϕ je **arbitraža** (arbitražna strategija), ako je

$$V_0(\phi) = 0 \ \text{ i } \ \mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Uočimo da iz dopustivosti od ϕ imamo $V_T(\phi) \ge 0$. Interpretacija arbitraže ista je kao i u jednoperiodnom modelu: bez rizika od gubitka, arbitražna strategija s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit.

Kao i u prethodnom poglavlju, ekonomski razlozi nalažu nam da promatramo samo modele financijskih tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Za financijsko tržište kažemo da ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. To možemo izreći na sljedeći ekvivalentan način: neka je Γ konveksni konus svih pozitivnih varijabli,

$$\Gamma = \{X : \Omega \to [0, \infty) : \exists \omega' \in \Omega,\ X(\omega') > 0\}.$$

Ako tržište ne dopušta arbitražu, za svaku dopustivu strategiju ϕ za koju je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $\widetilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zaista, kada bi za dopustivu strategiju ϕ vrijedilo $V_0(\phi) = 0$ i $\widetilde{V}_T(\phi) \in \Gamma$, tada bi bilo i $V_T(\phi) \in \Gamma$, što znači da je ϕ arbitraža. Naravno, vrijedi i obrat: ako za svaku dopustivu strategiju ϕ takvu da je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $V_T(\phi) \notin \Gamma$, tada tržište ne dopušta arbitražu. Uočimo, također, da je $V_T(\phi) \notin \Gamma$ ekvivalentno s $\widetilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$.

Pojam arbitraže možemo definirati i za samofinancirajuće strategije koje nisu nužno dopustive: kažemo da je samofinancirajuća strategija ϕ arbitraža, ako je $V_0(\phi) = 0$, $V_T(\phi) \ge 0$ i $\mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$. Jasno je da ako niti jedna samofinancirajuća strategija nije arbitraža, tada niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. Postavlja se pitanje da li vrijedi i obrat. Naime, ako tržište ne dopušta arbitražu (t.j., niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža), da li se može dogoditi da postoji samofinancirajuća strategija koja je arbitraža. Da bismo odgovorili na to pitanje, prisjetimo se prvo procesa dobitka G, odnosno procesa diskontiranog dobitka $\widetilde{G}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_t(\phi) &= \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{t} \phi_j^i \Delta \widetilde{S}_j^i .
\end{aligned}$$

Uočimo da zbog $\Delta \widetilde{S}_t^0 = 0$, vrijednosti ϕ_t^0 nisu bitne za vrijednost od $\widetilde{G}$.

Lema 3.11. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada za svaki predvidiv proces* $(\phi^1, \ldots, \phi^d) = ((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d)\,,\, 0 \leq t \leq T)$ *vrijedi*

$$\widetilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma .$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, t.j., $\widetilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$. Tada ne može biti $\widetilde{G}_t(\phi) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T-1$, jer bi tada (nadopunjena) strategija ϕ (koju dobijemo iz Propozicije 3.8) bila arbitraža. Dakle, postoji $s \in \{1, \ldots, T-1\}$ takav da $\widetilde{G}_s(\phi)$ nije nenegativan. Definiramo

$$t_0 = \max\{s \,:\, \mathbf{P}(\widetilde{G}_s(\phi) < 0) > 0\} .$$

Znamo da mora biti $t_0 \leq T - 1$, i vrijedi $\mathbf{P}(\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0) > 0$, i $\widetilde{G}_s(\phi) \geq 0$ za $t_0 < s \leq T$. Definirajmo novu strategiju ψ na sljedeći način:

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & j \leq t_0 \\ 1_{(\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0)} \phi_j & j > t_0 . \end{cases}$$

Po strategiji ψ do (uključivo) trenutka t_0 uopće ne trgujemo, a od trenutka t_0 nadalje ne trgujemo za one ω za koje je $\widetilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) \geq 0$, dok za ω koje je $\widetilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) < 0$ slijedimo strategiju ϕ. Budući da je $\widetilde{G}_{t_0}(\phi)$ $\mathcal{F}_{t_0}$-izmjeriva i ϕ je predvidiv, dobivamo da je i slučajni niz ψ također predvidiv.

Izračunajmo diskontirani proces dobitka $\widetilde{G}(\psi)$ za strategiju ψ. Ako je $j \leq t_0$, tada je očito $\widetilde{G}_j(\psi) = 0$ (jer $\psi_k = 0$, $k = 0, \ldots, j$). Za $j > t_0$ imamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_j(\psi) &= \sum_{k=1}^{j} (\psi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \psi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \\
&= \sum_{k=t_0+1}^{j} (\psi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \psi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \\
&= 1_{(\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0)} \sum_{k=t_0+1}^{j} (\phi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \\
&= 1_{(\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0)} \left[\sum_{k=1}^{j} (\phi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) - \sum_{k=1}^{t_0} (\phi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \right] \\
&= 1_{(\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0)} (\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G}_{t_0}(\phi)) .
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\widetilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & j \leq t_0 \\ 1_{(\widetilde{G}_{t_0}(\phi)<0)}(\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G}_{t_0}(\phi)), & t_0 < j \leq T. \end{cases}$$

Slijedi da je $\widetilde{G}_j(\psi) \geq 0$, za sve $j \in \{0, 1, \ldots, T\}$, te

$$\widetilde{G}_T(\psi) = 1_{(\widetilde{G}_{t_0}(\phi)<0)}(\widetilde{G}_T(\phi) - \widetilde{G}_{t_0}(\phi)) > 0$$

na $\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}$. Dakle, ψ je dopustiva strategija koja je arbitraža. Kontradikicija. □

Pretpostavimo sada da je ϕ samofinancirajuća strategija za koju je $V_0(\phi) = 0$. Tada je $\widetilde{V}_T(\phi) = \widetilde{G}_T(\phi)$ i po Lemi 3.11, $\widetilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zato vrijedi i $V_T(\phi) \notin \Gamma$. Dakle, niti jedna samofinancirajuća strategija ne može biti arbitraža.

3.2. **Martingali i mogućnost arbitraže.** U ovom odjeljku podsjetit ćemo se na fundamentalne pojmove uvjetnog očekivanja i martingala. Kao i do sada, promatramo konačan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, te vrijedi $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$. Dodatno, na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ imamo i filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$.

Podsjetimo se definicije uvjetne vjerojatnosti i uvjetnog očekivanja s obzirom na događaj pozitivne vjerojatnosti. Neka je $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0$. Tada definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbf{P}_A : \mathcal{F} \to [0, 1]$ formulom

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B|A) := \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Uvjetno očekivanje slučajne varijable $X : \Omega \to \mathbf{R}$ u odnosu na događaj A, je očekivanje od X s obzirom na (uvjetnu) vjerojatnost $\mathbf{P}_A$:

$$\mathbf{E}[X|A] = \mathbf{E}_A[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}_A(\{\omega\}).$$

Jednostavno se vidi da je

$$\mathbf{E}[X|A] = \frac{\mathbf{E}[X 1_A]}{\mathbf{P}(A)}.$$

Podjsetimo se sada definicije uvjetnog očekivanja s obzirom na σ-podalgebru od $\mathcal{F}$.

Definicija 3.12. Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra sadržana u $\mathcal{F}$. **Uvjetno očekivanje od X s obzirom na $\mathcal{G}$** je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ t.d. je

$$\mathbf{E}[1_A\, \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[1_A X] \tag{3.3}$$

za sve $A \in \mathcal{G}$.

Napomena 3.13. Pokaže se da je gornja definicija dobra, odnosno da je slučajna varijable za koju vrijedi jednakost (3.3) g.s. jedinstvena. Drugim riječima, ako za $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y vrijedi

$$\mathbf{E}[1_A Y] = \mathbf{E}[1_A X]$$

za sve $A \in \mathcal{G}$ tada je $Y = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s.

Promotrimo vezu uvjetnih očekivanja obzirom na događaj i obzirom na σ-algebru. Ako je σ-algebra $\mathcal{G}$ određena atomima $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tada je

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) := \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}[X|A_j] 1_{A_j}(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathbf{E}[X 1_{A_j}]}{\mathbf{P}(A_j)} 1_{A_j}(\omega).$$

Drugim riječima, ako je $\omega \in A_j$, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbf{E}[X|A_j]$.

Napomena 3.14. Podsjetimo se osnovnih svojstava uvjetnog očekivanja:

(i) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
(ii) $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[X]$.
(iii) Ako je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada vrijedi $\mathbf{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$.
(iv) Uvjetno očekivanje je linearno: za slučajne varijable X_1, X_2 i realne brojeve a_1, a_2 vrijedi $\mathbf{E}[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}] = a_1\mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbf{E}[X_2|\mathcal{G}]$.
(v) Uvjetno očekivanje je nenegativno: $X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
(vi) $|\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbf{E}[|X|\,|\mathcal{G}]$.
(vii) Ako je $\subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|] = \mathbf{E}[X|]$.
(viii) Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X]$.
(ix) $\mathbf{E}[(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] - X)^2] = \min\{\mathbf{E}[(Y - X)^2]\,,\, Y \text{ je } \mathcal{G}\text{-izmjeriva}\}$.

Podsjetimo se definicije martingala:

Definicija 3.15. Adaptiran slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je

(a) **martingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1$,
(b) **supermartingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1$,
(c) **submartingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Definicija se proširuje na višedimenzionalan slučaj: niz $M = (M_t, \,,\, 0 \leq t \leq T)$ slučajnih vektora u $\mathbf{R}^d$ je martingal, ako su sve komponente martingali. Uočimo da ako je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal, tada je najbolji procjenitelj slučajne varijable M_{t+1} (neposredna budućnost) uz danu informaciju (o prošlosti i sadašnjosti) $\mathcal{F}_t$ upravo trenutna vrijednost procesa M_t.

Napomena 3.16. Navedimo neka od osnovnih svojstava martingala (slična svojstva vrijede i za super(sub)martingale):

(i) Slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \leq s \leq t \leq T$ vrijedi $\mathbf{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.
(ii) Slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \leq t \leq T$ vrijedi $\mathbf{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = M_t$.
(iii) Ako je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal, tada je $\mathbf{E}[M_t] = \mathbf{E}[M_0]$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.
(iv) Linearna kombinacija konačno mnogo martingala opet je martingal.

Kako pomoću danog martingala M možemo konstruirati nove martingale? Vrlo koristan postupak kojim to činimo zove se martingalna transformacija. Prije definicije uvedimo oznaku $\Delta M_t := M_t - M_{t-1}$ za martingalnu razliku. Uočimo odmah da je $\mathbf{E}[\Delta M_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ zbog definicije martingala.

Definicija 3.17. Neka je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal, te neka je $H = (H_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Definiramo niz $X = (X_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ slučajnih varijabli na sljedeći način:

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0\,, \\ X_t &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_t \Delta M_t\,, \quad 1 \leq t \leq T\,. \end{aligned}$$

Niz X naziva se **martingalna transformacija**. Ponekad ćemo slučajni proces X označavati kao $H \circ M = ((H \circ M)_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$.

Propozicija 3.18. *Martingalna transformacija X je martingal. Nadalje, ako je slučajni proces M supermartingal, te ako je H nenegativan, tada je i martingalna transformacija X također supermartingal.*

Dokaz. Budući da je X_t linearna kombinacija $\mathcal{F}_t$-izmjerivih slučajnih varijabli, to je i sama $\mathcal{F}_t$-izmjeriva. Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[H_{t+1}\Delta M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \\ &= H_{t+1}\mathbf{E}[\Delta M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

gdje je za drugu jednakost iskorištena činjenica da je H_{t+1} $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i Napomena 3.16 (iii). Tvrdnja za supermartingal slijedi iz istog računa zbog $H_{t+1} \geq 0$ i $\mathbf{E}[\Delta M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq 0$. □

Financijska interpretacija martingalne transformacije je sljedeća: pretpostavimo da su diskontirane cijene $(\widetilde{S}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ financijskih imovina martingali. Ako je ϕ samofinancirajuća strategija, tada je po Propoziciji 3.7 (iii)

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \widetilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j\,.$$

Dakle, diskontirane vrijednosti portfelja su martingalna transformacija $\phi \circ \widetilde{S}$, te također tvore martingal. Specijalno je $\mathbf{E}[\widetilde{V}_t(\phi)] = \mathbf{E}[V_0(\phi)]$, za sve $0 \leq t \leq T$.

Sljedeća tvrdnja pokazuje da se martingalnost slučajnog procesa može karakterizirati pomoću svih martingalnih transformacija.

Propozicija 3.19. *Adaptiran niz slučajnih varijabli $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za svaki predvidiv niz slučajnih varijabli $H = (H_t\,,\, 1 \leq t \leq T)$ vrijedi*

$$\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t\right] = 0\,.$$

Dokaz. Neka je M martingal i neka je $H = (H_t\,,\, 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Stavimo $H_0 = 0$. Tada je martingalna transformacija $X = H \circ M$ također martingal. Specijalno vrijedi $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$. Međutim, zbog $H_0 = 0$ imamo $X_0 = 0$. Dakle, $0 = \mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t]$.
Obratno: fiksirajmo $j \in \{0, \ldots, T-1\}$, odaberimo $A \in \mathcal{F}_j$, i definirajmo niz slučajnih varijabli $H = (H_t\,,\, 1 \leq t \leq T)$ na sljedeći način:

$$H_t = \begin{cases} 0 & t \neq j+1\,, \\ 1_A & t = j+1. \end{cases}$$

Tada je $H = (H_t\,,\, 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz, pa po pretpostavci vrijedi $\mathbf{E}[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t] = 0$. Međutim,

$$\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t = H_{j+1}(M_{j+1} - M_j) = 1_A(M_{j+1} - M_j)\,.$$

Slijedi da je

$$\mathbf{E}[1_A M_j] = \mathbf{E}[1_A M_{j+1}]\,.$$

Budući da je $A \in \mathcal{F}_j$ bio proizvoljan, iz Napomene 3.13 slijedi da je

$$\mathbf{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j \,.$$

Kako je j bio proizvoljan, slijedi da je M martingal. □

Sada ćemo pojam martingala upotrijebiti za karakterizaciju financijskog tržišta bez arbitraže. Prvo nam treba definicija martingalne mjere u dinamičkom modelu tržišta.

Definicija 3.20. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **martingalna mjera** ili **mjera neutralna na rizik**, ako za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ vrijedi

$$\mathbf{E}^*[\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}^i_t\,, \quad i = 0, 1, \ldots, d\,.$$

Riječima, $\mathbf{P}^*$ je martingalna mjera ako su diskontirane cijene financijskih imovina martingali u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **ekvivalentna martingalna mjera**, ako je martingalna mjera i vrijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$.

Napomena 3.21. Pokažimo da je martingalna mjera iz prethodne definicije uistinu generalizacija martingalne mjere za jednoperiodni model iz Definicije 2.5. Podsjetimo se da je uvjetno očekivanje u odnosu na trivijalnu σ-algebru $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ zapravo očekivanje. Uočimo da uvjet za $t = 0$ iz gornje definicije daje

$$\mathbf{E}^*\left[\frac{S^i_1}{1+r}\right] = \mathbf{E}^*[\widetilde{S}^i_1] = \mathbf{E}^*[\widetilde{S}^i_1|\mathcal{F}_0] = \widetilde{S}^i_0 = S^i_0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, d\,.$$

Uočimo da to znači da je $\mathbf{P}^*$ martingalna mjera i u smislu Definicije 2.5.

Sljedeći rezultat je fundamentalni teorem određivanja cijena imovine u kontekstu dinamičkih modela tržišta.

Teorem 3.22. *Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz. $\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$. Tada je niz $(\widetilde{S}_t\,, 0 \le t \le T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal. Neka je $\phi = (\phi_t, \,, 0 \le t \le T)$ dopustiva (ili samofinancirajuća) strategija takva da je $V_0(\phi) = 0$. Tada je slučajni proces diskontiranih vrijednosti strategije

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j$$

martingalna transformacija, pa po Propoziciji 3.17, i sam $\mathbf{P}^*$-martingal. Slijedi $\mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}^*[V_0(\phi)]$. Zbog $V_0(\phi) = 0$ slijedi $\mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = 0$, a zbog dopustivosti je $\widetilde{V}_T(\phi) = \beta_T V_T(\phi) \ge 0$. Budući da je $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$ za sve ω, iz $\mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = 0$ i $\widetilde{V}_T(\phi) \ge 0$ slijedi da je $\widetilde{V}_T(\phi) \equiv 0$. Tada je i $V_T(\phi) \equiv 0$, pa je i $\mathbf{P}[V_T(\phi) > 0] = 0$. Dakle, dopustiva strategija ϕ nije arbitraža.
$\Rightarrow$ Obratno, pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Neka je

$$\mathcal{V} := \{\widetilde{G}_T(\phi)\,, \phi \text{ predvidiv proces u } \mathbf{R}^d\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ vektorski prostor slučajnih varijabli na Ω i možemo ga shvatiti kao vektorski potprostor konačnodimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^K$, gdje je kao i prije $K = |\Omega|$. Po Lemi 3.11, $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$. Definirajmo $K := \{X \in \Gamma : \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1\}$. Tada je $K \subset \Gamma$ konveksan i kompaktan skup za koji vrijedi $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 2.7 (b)), postoji $\lambda = (\lambda(\omega) : \omega \in \Omega)$ takav da vrijedi:

(i) $\sum_{\omega\in\Omega}\lambda(\omega)X(\omega)>0$ za sve $X\in K$,
(ii) $\sum_{\omega\in\Omega}\lambda(\omega)\widetilde{G}_T(\phi)(\omega)=0$ za svaki predvidiv ϕ.

Iz svojstva (i) slijedi da je $\lambda(\omega)>0$ za sve $\omega\in\Omega$ (zaista, dovoljno je uzeti X tako da je $X(\omega)=1$ i $X(\omega')=0$ za sve ostale ω'). Definiramo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ formulom:

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}):=\frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega}\lambda(\omega')}\,.$$

Zbog $\lambda(\omega)>0$ za sve $\omega\in\Omega$ slijedi $\mathbf{P}^*\approx\mathbf{P}$. Za proizvoljni predvidiv proces ϕ s vrijednostima u $\mathbf{R}^d$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*\left[\sum_{t=1}^T\phi_j\cdot\Delta\widetilde{S}_t\right] &= \mathbf{E}^*[\widetilde{G}_T(\phi)]\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}\widetilde{G}_T(\phi)(\omega)\mathbf{P}^*(\{\omega\})\\ &= \frac{1}{\sum_{\omega'\in\Omega}\lambda(\omega')}\sum_{\omega\in\Omega}\widetilde{G}_T(\phi)(\omega)\lambda(\omega)\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost izlazi iz (ii). Specijalno, za $i\in\{1,2,\dots,d\}$, stavimo $\phi_t^j=0$, $t=0,1,\dots,T$, $j\neq i$. Tada je

$$\mathbf{E}^*\left[\sum_{j=1}^T\phi_t^i\Delta\widetilde{S}_t^i\right]=0$$

za svaki (1-dim) predvidiv proces $(\phi_t^i,\ 1\le t\le T)$. Po Propoziciji 3.19 slijedi da je $\widetilde{S}^i$ $\mathbf{P}^*$-martingal. $\square$

3.3. **Potpuni modeli tržišta.**

Definicija 3.23. Slučajni zahtjev s dospijećem T je $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ takva da je

$$0\le C<\infty\quad \mathbf{P}-\text{g.s.}$$

Slučajni zahtjev C s dospijećem T zove se **izvedenica (derivative)** primarnih imovina $S^0,S^1,\dots,S^d$ ako je C funkcija slučajnih vektora $S_1,S_2,\dots,S_T$.

Primjer 3.24. Europska call opcija (na financijsku imovinu i) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C=(S_T^i-K)^+$. Dakle,

$$C=\begin{cases} S_T^i-K\,, & S_T^i>K\\ 0\,, & S_T^i\le K\,.\end{cases}$$

Europska put opcija (na financijsku imovinu i) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C=(K-S_T^i)^+$.
U gornja dva primjera C je funkcija od S_T^i, pa je prema tome izvedenica. Općenito, C može ovisiti o svim cijenama financijske imovine i do trenutka T.
Azijska call opcija (na financijsku imovinu i) s dospijećem T. Neka je

$$\overline{A}_T^i:=\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^T\widetilde{S}_t^i$$

srednja vrijednost diskontiranih cijena i-te imovine. Azijska call opcija (na i-tu imovinu) s cijenom izvršenja K je slučajni zahtjev $C = (\overline{A}_T^i - K)^+$.

Definicija 3.25. Slučajni zahtjev C je **dostižan** ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = C$. Kažemo da strategija ϕ **replicira** C.

Napomena 3.26. Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Ako je C slučajni zahtjev takav da je $V_T(\phi) = C$ za neku samofinancirajuću strategiju, tada je C dostižan slučajni zahtjev. Dovoljno je provjeriti da je u tom slučaju ϕ dopustiva strategija, t.j., $V_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \dots, T$. Taj uvjet je ekvivalentan uvjetu $\widetilde{V}_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \dots, T$. Neka je $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je $(\widetilde{V}_t(\phi)\,, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal, pa je

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi) \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\beta_T C \,|\, \mathcal{F}_t] \geq 0\,,$$

zbog $\beta_T > 0$ i $C \geq 0$.

Definicija 3.27. Model tržišta bez arbitraže je **potpun** ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.

Zahtjev na potpunost tržišta je ekonomski restriktivan i često nema ekonomsko opravdanje, za razliku od zahtjeva na nepostojanje arbitraže. Osnovni rezultat o potpunosti tržišta je sljedeći:

Teorem 3.28. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Dokaz je analogan dokazu za jednoperiodni model. Pretpostavimo da je model tržišta bez arbitraže potpun. Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev. Po pretpostavci postoji dopustiva strategija ϕ koja replicira C, $C = V_T(\phi)$. Specijalno vrijedi

$$\beta_T C = \widetilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{T} \phi_j \cdot \Delta\widetilde{S}_j\,.$$

Pretpostavimo da su $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Tada je proces $(\widetilde{V}_t(\phi)\,, 0 \leq t \leq T)$ martingal u donosu na $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$. Specijalno, to znači da je (zbog $\mathcal{F}_0$ trivijalna)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1[\widetilde{V}_T(\phi)] &= \mathbf{E}_1[V_0(\phi)] = V_0(\phi)\,,\\
\mathbf{E}_2[\widetilde{V}_T(\phi)] &= \mathbf{E}_2[V_0(\phi)] = V_0(\phi)\,,
\end{aligned}$$

otkud $\mathbf{E}_1[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}_2[\widetilde{V}_T(\phi)]$. Slijedi $\mathbf{E}_1[\beta_T C] = \mathbf{E}_2[\beta_T C]$. Budući da je $\beta_T = 1/(1+r)^T$ deterministički, dobivamo

$$\mathbf{E}_1[C] = \mathbf{E}_2[C]\,.$$

Ta jednakost vrijedi za svaku nenegativnu $\mathcal{F}_T$-izmjerivu slučajnu varijablu C. Budući da je po pretpostavci $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, slijedi $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ (zaista, dovoljno je za C uzeti $1_{\{\omega\}}$).
$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže, ali nepotpuno. To znači da postoji slučajni zahtjev C koji nije dostižan. Definiramo

$$\widetilde{\mathcal{V}} := \{U_0 + \sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta\widetilde{S}_t \,:\, U_0 \text{ je } \mathcal{F}_0 \text{ izmjeriva, } ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T) \text{ je predvidiv}\}\,.$$

Uočimo da za dani d-dimenzionalni predvidiv proces $((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T)$ postoji predvidiv proces $(\phi_t^0 \,:\, 1 \leq t \leq T)$ takav da je strategija $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d) \,:\, 1 \leq t \leq T)$ samofinancirajuća (Propozicija 3.8). Zbog $\Delta\widetilde{S}_t^0 = 0$, te budući da je U_0 konstanta ($\mathcal{F}_0$ je trivijalna), slijedi da je

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{V}_T(\phi) \,:\, \phi \text{ samofinancirajuća}\}\,.$$

Budući da po pretpostavci C nije dostižan zahtjev, zbog Napomene 3.26, ne može se dostići niti samofinancirajućom strategijom. Slijedi: $C/S_T^0 \notin \widetilde{\mathcal{V}}$. To znači da je $\widetilde{\mathcal{V}}$ pravi podskup skupa svih slučajnih varijabli. Jednostavno se provjeri da je $\widetilde{\mathcal{V}}$ vektorski podprostor.

Neka je $\mathbf{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera. Na prostoru svih slučajnih varijabli definiramo skalarni produkt

$$(X,Y) := \mathbf{E}^*[XY]\,, \quad X,Y : \Omega \to \mathbf{R}\,.$$

Budući da je $\widetilde{\mathcal{V}}$ pravi podprostor, postoji slučajna varijabla $X \neq 0$ ortogonalna na $\widetilde{\mathcal{V}}$, $X \in \widetilde{\mathcal{V}}^{\perp}$. Definiramo

$$\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right)\mathbf{P}^*(\{\omega\})$$

gdje je $\|X\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|$. Uočimo da je $1 \in \widetilde{\mathcal{V}}$ ($U_0 = 1$, $\phi \equiv 0$), pa je $X \perp 1$, t.j., $0 = \mathbf{E}^*[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}^*(\{\omega\})$. Slijedi:

$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|X\|_\infty}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}^*(\{\omega\}) = 1\,.$$

Očito je $1+\frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} > 0$, pa je $\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Dakle, $\mathbf{P}^{**}$ je vjerojatnost ekvivalentna s $\mathbf{P}^*$ i $\mathbf{P}^{**} \neq \mathbf{P}^*$ (zbog $X \neq 0$).

Neka je $\phi = ((\phi_t^1,\ldots,\phi_t^d) \,:\, 1 \le t \le T)$ predvidiv proces. Računamo

$$\mathbf{E}^{**}[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\widetilde{S}_t] = \mathbf{E}^*[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\widetilde{S}_t] + \frac{1}{2\|X\|_\infty}\mathbf{E}^*[X\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\widetilde{S}_t] = 0\,.$$

Prvi sumand je nula, jer je $(\widetilde{S}_t)$ $\mathbf{P}^*$-martingal, a drugi je nula, jer je $X \perp \widetilde{\mathcal{V}}$. Po Propoziciji 3.19 slijedi da je $(\widetilde{S}_t \,:\, 0 \le t \le T)$ martingal u donosu na $\mathbf{P}^{**}$. Dakle, $\mathbf{P}^{**}$ je martingalna mjera. Budući da je različita od $\mathbf{P}^*$, martingalna mjera nije jedinstvena. □

Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže i potpuno. Neka je $\mathbf{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Cilj nam je odrediti cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva C.

Neka je $C \ge 0$ proizvoljna $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla, te neka je ϕ dopustiva strategija koja replicira C: $V_T(\phi) = C$. Niz $(\widetilde{V}_t(\phi) \,:\, 0 \le t \le T)$ je $\mathbf{P}^*$-martingal, pa je

$$V_0(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right]\,.$$

Općenitije,

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right], t = 0,1,\ldots,T\,,$$

otkud

$$V_t(\phi) = S_t^0\mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right], t = 0,1,\ldots,T\,. \tag{3.4}$$

Dakle, u trenutku t je vrijednost $V_t(\phi)$ dopustive strategije ϕ koja replicira C potpuno određena s C.

Prirodno je $V_t(\phi)$ zvati cijenom slučajnog zahtjeva u trenutku t. To je bogatstvo potrebno u trenutku t za repliciranje zahtjeva C slijedeći strategiju ϕ. Specijalno, u trenutku $t = 0$,

$$C_0 = V_0(\phi) = \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{S_T^0} \right] .$$

Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ proda slučajni zahtjev C za cijenu $C_0 = \mathbf{E}^*[C/S_T^0]$, te dobiveni iznos $C_0 = V_0(\phi)$ uloži u replicirajući portfelj ϕ. Budući da je ϕ samofinancirajući, investitor može slijediti ϕ bez dodatnog ulaganja. Dakle, u svakom daljnjem vremenskom trenutku t, redistribucija imovina po dinamičkom portfelju ϕ je besplatna. U trenutku T, vrijednost portfelja jednaka je $V_T(\phi)$. Međutim , $V_T(\phi) = C$, što znači da je iznos $V_T(\phi)$ upravo dovoljan za pokriće obaveze dospijele po slučajnom zahtjevu C. Drugim riječima, dinamički portfelj ϕ je savršena zaštita (engl. hedge) za slučajni zahtjev C.

Uočite da nam je do sada za razvoj teorije bila potrebna samo egzistencija replicirajućeg portfelja ϕ. Za praktične potrebe hedginga, važno je izračunati taj portfelj. To ćemo kasnije naučiti za slučaj Cox-Ross-Rubinsteinovog (ili binomnog) modela.

Ponovimo još jednom da za računanje cijene slučajnog zahtjeva (opcije) moramo znati samo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$, t.j., ekvivalentnu martingalnu mjeru. Vjerojatnost $\mathbf{P}$, koja može biti objektivna vjerojatnost (statistički ustanovljena) ili bilo koja subjektivna vjerojatnost, potpuno je irelevantna za računanje cijena opcija. **Cijena slučajnog zahtjeva jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev**.

3.4. **CRR model.** U ovom odjeljku ćemo detaljno proučiti **Cox-Ross-Rubinsteinov model** (CRR model), za koji ćemo kasnije pokazati da je u stvari diskretna verzija Black-Scholesovog modela, najpoznatijeg (vremenski neprekidnog) modela financijskog tržišta.

CRR model je u stvari višeperiodna generalizacija binomnog modela iz Primjera 2.19. Pretpostavke modela su sljedeće:

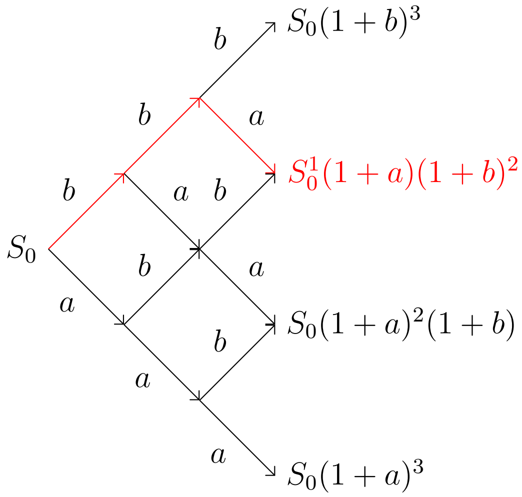
- na financijskom tržištu imamo jednu rizičnu financijsku imovinu (dionica), čija je cijena jednaka S_t u trenutku t, $0 \leq t \leq T$, te je relativna promjena cijene između dva trenutka jednaka ili a ili b, gdje je $-1 < a < b$ (nezavisno od vremena t i trenutne cijene dionice);
- također imamo jednu nerizičnu imovinu s fiksnim povratom $r > 0$ u jednom vremenskom trenutku: $S_t^0 = (1+r)^t$, $0 \leq t \leq T$.

Konstruirajmo vjerojatnosni prostor. Uočimo da se u svakom trenutku t slučajnost manifestira samo u tome je li relativna promjena cijene jednaka a ili b. Označimo $\Omega_1 := \{a, b\}$, te neka je $\mathbf{P}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbf{P}_1(\{b\}) = p$, $\mathbf{P}_1(\{a\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Za prostor elementarnih događaja Ω uzet ćemo Kartezijev produkt skupa Ω_1,

$$\Omega = \Omega_1^T = \{a, b\}^T = \{(\omega_1, \dots, \omega_T) : \omega_t \in \{a, b\}, \, t = 1, \dots, T\} .$$

Za vjerojatnost $\mathbf{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost $\mathbf{P}_1^T$. Dakle, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1^T$.

Na primjer, za $T = 3$, $\mathbf{P}(\{(b, b, a)\}) = p^2(1-p)$ i elementarni događaj $\omega = (b, b, a)$ odgovara grani sljedećeg binomnog stabla označenoj crvenom bojom:



Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ definiramo niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots X_T$ (relativna promjena cijene dionice) na sljedeći način:

$$X_t(\omega) = \omega_t\,, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)\,.$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable (jer je riječ o projekcijama na produktnom vjerojatnosnom prostoru), s distribucijom

$$\mathbf{P}(X_t = a) = 1 - p\,, \qquad \mathbf{P}(X_t = b) = p\,.$$

Neka je $S_0 \in \mathbf{R}_+$ dano. Niz slučajnih varijabli $S = (S_t : t = 0, 1, \dots, T)$ definiramo sa

$$S_t := S_{t-1}(1 + X_t)\,, \quad t = 1, 2, \dots, T\,.$$

Uočimo da je

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = X_t\,.$$

Prema tome, niz $S = (S_t : t = 0, 1, \dots, T)$ možemo interpretirati kao niz cijena dionice kod koje je u svakom trenutku t relativna promjena cijene (t.j., povrat) jednaka ili a ili b. Te relativne promjene modelirane su slučajnim varijablama X_t, $t = 1, 2, \dots, T$. Diskontirane cijene dionice definirane su kao i do sada: $\widetilde{S}_t = \beta_t S_t = S_t / S_t^0 = S_t/(1 + r)^t$.

Još preostaje definirati filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \dots, T)$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Po definiciji je $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Dostupna informacija u trenutku t su cijene dionice do (uključivo) trenutka t. Dakle, imamo informaciju o $S_0, S_1, \dots, S_t$. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću $X_1, \dots, X_t$. To je jasno: iz relativnih promjena cijena možemo rekonstruirati cijene dionice, i obratno, iz cijena dionice možemo izračunati relativne promjene. Matematički se informacija dana s $S_1, \dots, S_t$ opisuje σ-algebrom $\mathcal{F}_t := \sigma(S_1, \dots, S_t)$. To je najmanja σ-algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S_1, \dots, S_t$ izmjerive. Alternativno, zbog jednake informacije sadržane u nizu $X_1, \dots, X_t$, vrijedi $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.

Primjer 3.29. Neka je $T = 3$. Izračunajmo eksplicitno filtraciju tako da izračunamo atome odgovarajućih σ-algebri $\mathcal{F}_t$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \sigma\left(\{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b)\},\{(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}\right)\,,\\
\mathcal{F}_2 &= \sigma\left(\{(a,a,a),(a,a,b)\},\{(a,b,a),(a,b,b)\},\{(b,a,a),(b,a,b)\},\{(b,b,a),(b,b,b)\}\right)\,,\\
\mathcal{F}_3 &= \sigma\left(\{(a,a,a)\},\{(a,a,b)\},\{(a,b,a)\},\{(a,b,b)\},\{(b,a,a)\},\{(b,a,b)\},\{(b,b,a)\},\{(b,b,b)\}\right)\,.
\end{aligned}$$

Želimo odrediti pod kojim uvjetima na parametre modela (a, b, r, p) ovaj model tržišta ne dopušta arbitražu, odnosno kada je model potpun. Sljedeći rezultat ključan je za ovu analizu:

Lema 3.30. *Neka je $\hat{\mathbf{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$.*

(a) *Niz diskontiranih cijena $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ je $\hat{\mathbf{P}}$-martingal ako i samo ako vrijedi*

$$\hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r\,, \quad t = 1, 2, \ldots, T\,.$$

(b) *Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $a < r < b$ i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$).*

Dokaz. (a) Fiksirajmo $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$. Kako je $\widetilde{S}_{t-1}$ $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva slučajna varijabla, vrijedi ekvivalencija

$$\hat{\mathbf{E}}[\widetilde{S}_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \widetilde{S}_{t-1} \iff \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1.$$

Nadalje, kako je

$$1 = \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{1}{1+r}\hat{\mathbf{E}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{1}{1+r}\hat{\mathbf{E}}[1 + X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}],$$

slijedi da je

$$\hat{\mathbf{E}}[\widetilde{S}_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \widetilde{S}_{t-1} \iff \hat{\mathbf{E}}[1 + X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = 1 + r \iff \hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r.$$

(b) Kako je $X_t \in \{a, b\}$ i $\mathbf{P} \approx \hat{\mathbf{P}}$ vrijedi $\hat{\mathbf{P}}(X_t = a) > 0$ i $\hat{\mathbf{P}}(X_t = b) > 0$. Dodatno, po pretpostavci (a) imamo da je $\hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r$.

Pretpostavimo da ne vrijedi $r \in (a, b)$. Tada je ili $r \leq a < b$ ili $a < b \leq r$. U prvom slučaju je tada $\hat{\mathbf{P}}(X_t \geq r) = 1$ i $\hat{\mathbf{P}}(X_t > r) > 0$ otkud slijedi $\hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] > r$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Slučaj $a < b \leq r$ na isti način daje kontradikciju.

Nadalje, odredimo uvjetnu razdiobu slučajne varijable X_t uvjetno na $\mathcal{F}_{t-1}$. Želimo odrediti $\hat{p} := \hat{\mathbf{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$ (uočimo $\hat{\mathbf{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = 1 - \hat{p}$). Kako je

$$r = \hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = a\hat{\mathbf{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] + b\hat{\mathbf{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = a(1 - \hat{p}) + b\hat{p},$$

slijedi da je

$$\hat{p} = \frac{r - a}{b - a}$$

Uočimo da je zbog pokazanog $a < r < b$ nužno $0 < \hat{p} < 1$, pa je gornje rješenje dobro.

Sada iz gornje uvjetne razdiobe možemo odrediti razdiobu od X_t obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\hat{P}$: Iz gornje dvije jednakosti prvo čitamo da je

$$\hat{\mathbf{P}}[X_t = a] = \hat{\mathbf{E}}[1_{\{X_t = a\}}] = \hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{E}}[1_{\{X_t = a\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbf{E}}[1 - \hat{p}] = 1 - \hat{p}\,,$$

i slično, $\hat{\mathbf{P}}[X_t = b] = \hat{p}$. To pokazuje jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (obzirom na $\hat{\mathbf{P}}$). Nadalje, iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\hat{\mathbf{P}}[X_t = x \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \hat{\mathbf{P}}[X_t = x]$$

za $x \in \{a, b\}$, pa zaključujemo da je X_t nezavisna od σ-algebre $\mathcal{F}_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Budući da je $\mathcal{F}_{t-1}$ generirana s $X_1, \ldots, X_{t-1}$, slijedi da je X_t nezavisna s $X_1, \ldots, X_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Odavde se vidi nezavisnost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$). $\square$

Uočimo da je uz pretpostavke gornje leme, X_t nezavisna od $\mathcal{F}_{t-1}$ (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$), pa je uvjetno očekivanje $\hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$ ustvari jednako očekivanju $\hat{\mathbf{E}}[X_t] = (1-\hat{p})a + \hat{p}\,b$. Gornjom lemom također smo pokazali da je uvjet $a < r < b$ nužan za nepostojanje arbitraže u CRR modelu - ako tržište ne dopušta arbitražu, tada postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$, pa po Lemi 3.30 (b) slijedi da je $a < r < b$.

Lema 3.31. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada je $r \in (a, b)$.*

Gornju lemu možemo jednostavno objasniti i ekonomskim argumentom. Pretpostavimo da $r \notin (a, b)$, i na primjer, $r \le a < b$. Tada je $S_T(\omega) \ge S_0(1+a)^T \ge S_0(1+r)^T$ za sve $\omega \in \Omega$, te postoji ω' takav da je $S_T(\omega') > S_0(1+r)^T$. Dakle, posudimo li iz banke S_0 kuna i investiramo u jednu dionicu rizične imovine (te čekamo da dođe vrijeme T), ne možemo imati manje od $S_0(1+r)^T$ koliko smo u trenutku T dužni banci, a s pozitivnom vjerojatnošću ćemo imati strogo više od tog iznosa.

Sada želimo pokazati obrat Leme 3.31, t.j., da je uvjet $r \in (a, b)$ dovoljan za nepostojanje arbitraže na tržištu. To ćemo dokazati tako da, uz pretpostavku $a < r < b$, konstruiramo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. Označimo $p^* := \mathbf{P}^*(X_1 = b)$. Uz $\mathbf{P}^*$ je proces diskontiranih cijena $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ martingal, pa po Lemi 3.30 tada vrijedi $\mathbf{E}^*[X_1] = r$, odnosno

$$r = \mathbf{E}^*[X_1] = (1-p^*)a + p^*b,$$

otkud dobivamo

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} \in (0,1)\,.$$

Neka je $\mathbf{P}_1^*$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbf{P}_1^*(\{b\}) = p^*$, te neka je $\mathbf{P}^* := (\mathbf{P}_1^*)^T$. Vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna je vjerojatnosti $\mathbf{P}$ (jer je $p^* \in (0,1)$ i $\mathbf{P}^*(\omega) = \prod_{t=1}^T \mathbf{P}_1^*(\{\omega_t\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$). Štoviše, slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su nezavisne u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Nadalje, kako je $\mathbf{E}^*[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}^*[X_t] = (1-p^*)a + p^*b = r$, iz Leme 3.30 (a) slijedi da je $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ martingal u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Dakle, ovako konstruirana vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera. Na taj način smo dokazali prvi dio sljedeće propozicije.

Propozicija 3.32. (a) *CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r < b$.*
(b) *Ako je $a < r < b$, tada je CRR model potpun.*

Dokaz. (b) Neka su $\mathbf{P}^*$ i $\hat{\mathbf{P}}$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Po Lemi 3.30 (b), slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su tada nezavisne, jednako distribuirane (i po $\mathbf{P}^*$ i po $\hat{\mathbf{P}}$), te vrijedi

$$\mathbf{P}^*(X_t = a) = 1 - p^* = \hat{\mathbf{P}}(X_t = a)\,, \quad \mathbf{P}^*(X_t = b) = p^* = \hat{\mathbf{P}}(X_t = b)\,.$$

Zbog

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\}) &= \mathbf{P}^*(X_1 = \omega_1, \ldots, X_T = \omega_T) \\ &= \mathbf{P}^*(X_1 = \omega_1) \cdots \mathbf{P}^*(X_T = \omega_T)\,, \end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\}) &= \hat{\mathbf{P}}(X_1 = \omega_1, \ldots, X_T = \omega_T) \\ &= \hat{\mathbf{P}}(X_1 = \omega_1) \cdots \hat{\mathbf{P}}(X_T = \omega_T)\,, \end{aligned}$$

slijedi

$$\mathbf{P}^*(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\}) = \hat{\mathbf{P}}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\})$$

za sve $(\omega_1, \dots, \omega_T) \in \Omega$ (ovdje su $\omega_1, \dots, \omega_t \in \{a, b\}$). Zato je $\mathbf{P}^* = \hat{\mathbf{P}}$, što znači da je martingalna mjera jedinstvena. Po Teoremu 3.28, tržište je potpuno. $\square$

Označimo sa C_t (odnosno P_t), $t = 0, 1, \dots, T$, vrijednost call opcije (odnosno put opcije) na jednu dionicu sa cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T. Te vrijednosti su na dan dospijeća jednake

$$C_T = (S_T - K)^+ , \quad P_T = (K - S_T)^+ .$$

Nadalje, neka je $\mathbf{P}^*$ jedinstvena martingalna mjera. Tada po formuli (3.4) imamo

$$\begin{aligned} C_t &= S_t^0 \, \mathbf{E}^* \left[\frac{C_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_t \right] = (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] && (3.5) \\ P_t &= S_t^0 \, \mathbf{E}^* \left[\frac{P_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_t \right] = (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(K - S_T)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] . && (3.6) \end{aligned}$$

Vrijednosti C_t i P_t zadovoljavaju sljedeći *call-put paritet*:

$$\begin{aligned} C_t - P_t &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[S_T - K \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[S_T \,|\, \mathcal{F}_t] - K(1+r)^{-(T-t)} \\ &= S_t - K(1+r)^{-(T-t)} \end{aligned}$$

Uočimo da je formulom (3.5) dan izraz za cijenu call opcije pomoću očekivanja u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. Sada ćemo to očekivanje eksplicitno izračunati.

Propozicija 3.33. *Neka je $c : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana formulom*

$$c(t, x) := (1+r)^{-(T-t)} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-t-j} \left(x(1+a)^j (1+b)^{T-t-j} - K \right)^+ . \quad (3.7)$$

Tada vrijedi $C_t = c(t, S_t)$ za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Specijalno, u trenutku $t = 0$ cijena call opcije je

$$C_0 = c(0, S_0) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} \binom{T}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-j} (S_0(1+a)^j (1+b)^{T-j} - K)^+ . \quad (3.8)$$

Dokaz. Zbog $S_t = S_{t-1}(1 + X_t)$ vrijedi da je $S_T = S_t \prod_{i=t+1}^{T} (1 + X_i)$, $t = 0, 1, \dots, T$. Stoga je po formuli (3.5)

$$C_t = (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^{T} (1 + X_i) - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] .$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i)-K)^+ \mid S_t = x] \\
&= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i)-K)^+ \mid S_t = x] \\
&= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i)-K)^+] \ \ (\text{zbog nezavisnosti } X_i, i \geq t+1, \text{ i } S_t) \\
&= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=1}^{T-t}(1+X_i)-K)^+] \ \ (\text{zbog } X_i \text{ su njd uz } \mathbf{P}^*) \\
&= \sum_{j=0}^{T-t}\binom{T-t}{j}(1-p^*)^j(p^*)^{T-t-j}\left(x(1+a)^j(1+b)^{T-t-j}-K\right)^+ ,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz distribucije (uz $\mathbf{P}^*$) slučajnih varijabli X_j. Tvrdnja propozicije slijedi direktno iz gornjih računa. □

Budući da je model koji promatramo potpun, call opcija se može replicirati. Sada ćemo eksplicitno izračunati replicirajuću strategiju $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1);\ 0 \leq t \leq T)$. Slijedimo li strategiju ϕ, vrijednost portfelja u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$ jednaka je $\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t$. S druge strane, budući da strategija replicira call opciju, vrijednost replicirajućeg portfelja u trenutku t jednaka je vrijednosti opcije $C_t = c(t, S_t)$ u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$. Dakle vrijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t = c(t, S_t)\,.$$

Pomnožimo gornju jednakost indikatorom $1_{(X_t=a)}$. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{(X_t=a)} + \phi_t^1 S_t 1_{(X_t=a)} = c(t, S_t) 1_{(X_t=a)}\,.$$

Uvrstimo $S_t\, 1_{(X_t=a)} = S_{t-1}(1+X_t)\, 1_{(X_t=a)} = S_{t-1}(1+a)\, 1_{(X_t=a)}$ u gornju jednadžbu. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{(X_t=a)} + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a)\, 1_{(X_t=a)} = c(t, S_{t-1}(1+a))\, 1_{(X_t=a)}\,.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$ u gornjoj formuli, te iskoristimo da su ϕ_t^0, ϕ_t^1 i S_{t-1} izmjerive u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$, te da je X_t nezavisna s $\mathcal{F}_{t-1}$. Dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t \mathbf{P}^*(X_t = a) + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a)\mathbf{P}^*(X_t = a) = c(t, S_{t-1}(1+a))\mathbf{P}^*(X_t = a)\,.$$

Podijelimo s $\mathbf{P}^*(X_t = a)$ i dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a) = c(t, S_{t-1}(1+a))\,.$$

Na isti način možemo dobiti jednakost

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+b) = c(t, S_{t-1}(1+b))\,.$$

Oduzmimo prvu jednakost od druge. Slijedi:

$$\phi_t^1 S_{t-1}((1+b)-(1+a)) = c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))\,,$$

odnosno

$$\phi_t^1 = \frac{c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)} = \Delta(t, S_{t-1})\,,$$

gdje je $\Delta : \{1, \ldots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirano formulom

$$\Delta(t, x) := \frac{c(t, x(1+b)) - c(t, x(1+a))}{x(b-a)} . \tag{3.9}$$

Izraz $\Delta(t, x)$ zovemo **delta opcije**.

Kako računamo replicirajuću strategiju call opcije? U trenutku $t = 0$ vrijednost opcije jednaka je C_0. Izračunamo $\phi_1^1 = \Delta(1, S_0)$ što možemo, jer nam je S_0 poznato u trenutku $t = 0$. Vrijednost od ϕ_1^0 izračunamo iz jednakosti $\phi_1^0 + \phi_1^1 S_0 = C_0$. Riječima, u trenutku $t = 0$ raspolažemo iznosom C_0. Dio $\phi_1^1 S_0$ tog iznosa uložimo u dionice, a ostatak stavimo u banku (ili posudimo iz banke u slučaju $\phi_1^1 S_0 > C_0$). U trenutku $t = 1$ sazna se cijena dionice S_1. Izračunamo $\Delta(2, S_1)$ što je ϕ_2^1. Rebalansiramo portfelj tako da sadrži ϕ_2^1 dionica u vrijednosti $\phi_2^1 S_1$. Razlika ostaje u novcu. Preciznije, vrijedi

$$V_1(\phi) = \phi_1^0(1+r) + \phi_1^1 S_1 = \phi_2^0(1+r) + \phi_2^1 S_1 ,$$

otkud izračunamo

$$\phi_2^0 = \frac{1}{1+r} \left(V_1(\phi) - \phi_2^1 S_1 \right) .$$

Na isti način računamo replicirajući portfelj u ostalim vremenskim trenucima.

Primjer 3.34. U Primjeru 3.24 već smo vidjeli neke druge tipove opcija u dinamički modelima tržišta, gdje isplata ovisi o svim cijenama dionice do trenutka T. Pogledajmo još nekoliko primjera takvih opcija u CRR modelu (imamo samo jednu dionicu na tržištu):

(i) **Azijske opcije** - neka je

$$A_T = \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} S_t$$

srednja vrijednost cijena dionica do trenutka T. Uz azijsku call opciju $(A_T - K)^+$ i azijsku put opciju $(K - A_T)^+$, na tržištu se trguje i modificiranim call/put azijskim opcijama čije su isplate $(S_T - A_T)^+$, odnosno $(A_T - S_T)^+$;

(ii) ***Lookback*** **opcije** - označimo

$$m = \min\{S_t : t \in [0, T]\}, \; M = \max\{S_t : t \in [0, T]\}.$$

Lookback call opcija je isplata $C = S_T - m$, a lookback put opcija jednaka je $C = M - S_T$. Možemo promatrati i modificirate call/put lookback opcije: $C = (K - m)^+$ i $C = (M - K)^+$.

(iii) **Opcije s barijerama** su opcije koje aktiviraju ili prestanu vrijediti ako cijena dionice prijeđe neki unaprijed zadani prag B (barijera). Razlikujemo sljedeća četiri tipa opcija s barijerom: *down-and-in* ($C = 1_{\{m<B\}} X$), *down-and-out* ($C = 1_{\{m>B\}} X$), *up-and-in* ($C = 1_{\{M>B\}} X$), *up-and-out* ($C = 1_{\{M<B\}} X$). Ovdje X označava tip isplate, pa ćemo tako da $X = (S_T - K)^+$ promatrati odgovarajuću call opciju s barijerom.

(iv) **Digitalna (binarna) opcija** isplaćuje fiksni iznos Q ukoliko je cijena dionice u trenutku T veća od cijene izvršenja K, $C = Q 1_{\{S_T > K\}}$.

Zadatak 3.35. Promatramo CRR model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$ i $T = 3$. Početna cijena dionice je $S_0 = 100$. Odredite cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K = 120$ te pripadni replicirajući portfelj.

Rješenje:

4. Problem optimalnog zaustavljanja i američke opcije

4.1. **Uvod u američke opcije.** Kao i u prethodnom poglavlju, promatramo dinamički diskretni model financijskog tržišta. Osnovna razlika američkih opcija u odnosu na opcije koje smo do sada promatrali (europske opcije) je ta da se pravo na kupnju (prodaju) može ostvariti i u trenucima prije dospijeća opcije.

Primjer 4.1. Američka call opcija s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo kupiti dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T. **Američka put opcija** s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo prodati dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T.

Pretpostavimo da je američka call opcija napisana na prvu financijsku imovinu, te da je cijena izvršenja jednaka K. U trenutku $t = 1$, unutarnja vrijednost tog američkog calla jednaka je $(S_1^1 - K)^+$, u trenutku $t = 2$ vrijednost je $(S_2^1 - K)^+$, i tako dalje do trenutka $t = T$ kada joj je vrijednost $(S_T^1 - K)^+$. Stavimo $Z_t := (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Tada na američku call opciju možemo gledati kao na adaptiran niz slučajnih varijabli $(Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$.

Prethodni primjer nas vodi na definiciju američkog slučajnog zahtjeva (opcije).

Definicija 4.2. Američki slučajni zahtjev je adaptiran niz slučajnih varijabli $Z = (Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$.

Označimo s $U = (U_t : t = 0, 1, \ldots, T)$, cijenu (vrijednost) američkog slučajnog zahtjeva $Z = (Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$. Uočimo da je U_t općenito slučajna varijabla. Kako možemo odrediti cijenu U_t?

- Uočimo da je u trenutku T vrijednost (cijena) američkog slučajnog zahtjeva Z jednaka točno unutarnjoj vrijednosti,
$$U_T = Z_T.$$
- Promotrimo trenutak $T - 1$. U tom trenutku vlasnik američke opcije je može odmah iskoristiti i dobiti iznos Z_{T-1}, ili je može iskoristiti u trenutku T, te dobiti iznos Z_T. U trenutku $T - 1$ iznos Z_T je nepoznat, ali znamo izračunati njegovu vrijednost (cijenu). To je vrijednost (u trenutku $T - 1$) opcije koja u trenutku T vrijedi Z_T. Ta vrijednost je po formuli (3.4) jednaka
$$S_{T-1}^0 \, \mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}] = S_{T-1}^0 \, \mathbf{E}^* \left[\frac{Z_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_{T-1} \right] .$$
Racionalni investitor odlučit će se u trenutku $T - 1$ za veću od te dvije vrijednosti. Zato je
$$\begin{aligned} U_{T-1} &= \max \left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \, \mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}] \right) \\ &= \max \left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \, \mathbf{E}^* \left[\frac{Z_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_{T-1} \right] \right) \\ &= \max \left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \, \mathbf{E}^* \left[\frac{U_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_{T-1} \right] \right) . \end{aligned}$$
Primijetimo da je U_{T-1} $\mathcal{F}_{T-1}$-izmjeriva slučajna varijabla koja je vrijednost američke opcije Z u trenutku $T - 1$.

- Pomaknimo se jedan vremenski trenutak unatrag i promotrimo što se događa u $t = T-2$. Investitor može odmah iskoristiti opciju i dobiti iznos Z_{T-2}, ili je ne iskoristiti. Ako ne iskoristi opciju, u trenutku $T-1$ ona će vrijediti U_{T-1}. Vrijednost (u trenutku $T-2$) opcije U_{T-1} s dospijećem $T-1$ po formuli (3.4) jednaka je
$$S^0_{T-2}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S^0_{T-1}}\,|\,\mathcal{F}_{T-2}\right].$$
Slijedi da je
$$U_{T-2} = \max\left(Z_{T-2}, S^0_{T-2}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S^0_{T-1}}\,|\,\mathcal{F}_{T-2}\right]\right).$$
- Indukcijom unatrag dobivamo da je za sve $t = 1,\dots,T$,
$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, S^0_{t-1}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_t}{S^0_t}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]\right). \tag{4.1}$$

Za slučaj $S^0_t = (1+r)^t$, formula (4.1) prelazi u
$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]\right).$$

Neka je $\widetilde{U}_t := U_t/S^0_t$ diskontirana cijena američke opcije. Za razliku od europskog slučajnog zahtjeva, diskontirana cijena američkog slučajnog zahtjeva nije nužno $\mathbf{P}^*$-martingal, već samo $\mathbf{P}^*$-supermartingal.

Propozicija 4.3. *Niz $(\widetilde{U}_t : 0 \le t \le T)$ je $\mathbf{P}^*$-supermartingal. To je najmanji $\mathbf{P}^*$ supermartingal koji dominira niz $(\widetilde{Z}_t : 0 \le t \le T)$.*

Dokaz. Iz jednakosti (4.1) slijedi
$$\frac{U_{t-1}}{S^0_{t-1}} = \max\left(\frac{Z_{t-1}}{S^0_{t-1}}, \mathbf{E}^*\left[\frac{U_t}{S^0_t}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]\right),$$
t.j.,
$$\widetilde{U}_{t-1} = \max(\widetilde{Z}_{t-1}, \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]).$$
Odavde čitamo:
$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{t-1} &\ge \widetilde{Z}_{t-1}\,, t = 1,\dots T \qquad (\widetilde{U} \text{ dominira } \widetilde{Z}), \text{ i}\\ \widetilde{U}_{t-1} &\ge \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]\,, t = 1,\dots T \qquad (\widetilde{U} \text{ je supermartingal}).\end{aligned}$$
Dakle, $(\widetilde{U}_t : 0 \le t \le T)$ je $\mathbf{P}^*$-supermartingal koji dominira niz $(\widetilde{Z}_t : 0 \le t \le T)$.

Sada pokazujemo da je $(\widetilde{U}_t : 0 \le t \le T)$ najmanji supermartingal koji dominira niz $(\widetilde{Z}_t : 0 \le t \le T)$. Neka je $(X_t : t = 0,1,\dots,T)$ supermartingal koji dominira $\widetilde{Z}$, $X_t \ge \widetilde{Z}_t$, $t = 0,1,\dots,T$. Zbog $\widetilde{Z}_T = \widetilde{U}_T$ vrijedi $X_T \ge \widetilde{U}_T$. Pretpostavimo da vrijedi $X_t \ge \widetilde{U}_t$. Tada je
$$\begin{aligned}X_{t-1} &\ge \mathbf{E}^*[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] \ge \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}], \text{ i}\\ X_{t-1} &\ge \widetilde{Z}_{t-1}.\end{aligned}$$

Slijedi
$$X_{t-1} \ge \max(\widetilde{Z}_{t-1}, \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]) = \widetilde{U}_{t-1}.$$
□

Sljedeće pitanje na koje želimo dati odgovor je pitanje optimalnog vremena za korištenje američke opcije. Prvo se podsjetimo nekih pojmova iz teorije slučajnih procesa, kao što su vrijeme zaustavljanja i zaustavljeni proces.

4.2. **Vrijeme zaustavljanja.** Kao i u prethodnom poglavlju, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ diskretni vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Pretpostavit ćemo da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka je, nadalje, dana filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$. Ne pretpostavljamo da nužno vrijedi $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, niti $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definicija 4.4. Slučajna varijabla $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ zove se **vrijeme zaustavljanja** ako za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijedi
$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Uočite da je po definiciji slučajna varijabla τ vrijeme zaustavljanja, ako događaj $\{\tau \le t\}$ ovisi samo o informaciji dostupnoj do trenutka t. Drugim riječima, u trenutku t znamo da li se vrijeme τ već dogodilo ili ne. Jednostavno se vidi da je uvjet iz definicije ekvivalentan sljedećem uvjetu: za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijedi
$$\{\tau = t\} = \{\tau \le t\} \setminus \{\tau \le t-1\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Neka je $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. **Slučajni proces zaustavljen u vremenu** τ, u oznaci $X^\tau = (X^\tau_t\,,\, 0 \le t \le T)$ definiran je formulom
$$X^\tau_t(\omega) := X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega)\,,$$
odnosno preciznije, na skupu $\{\tau = s\}$ vrijedi
$$X^\tau_t = \begin{cases} X_s & \text{ako je } s \le t \\ X_t & \text{ako je } s > t \end{cases}$$
Uočimo da je uvijek $X^\tau_T = X_\tau$ i $X^\tau_0 = X_0$.

Propozicija 4.5. *Neka je $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $X^\tau = (X^\tau_t\,,\, 0 \le t \le T)$ također adaptiran. Ako je X martingal (odnosno supermartingal), tada je i X^τ također martingal (odnosno supermartingal).*

Dokaz. Za dokaz adaptiranosti primijetimo prvo da za Borelov skup $A \subset \mathbf{R}$ vrijedi
$$\{X_s \in A, \tau = s\} \in \mathcal{F}_s$$
(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_s$), te
$$\{X_t \in A, \tau > t\} \in \mathcal{F}_t$$
(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_t$). Zato je
$$\begin{aligned} \{X^\tau_t \in A\} &= \cup_{s=0}^T \{X^\tau_t \in A, \tau = s\} \\ &= \cup_{s=0}^t \{X_s \in A, \tau = s\} \bigcup \cup_{s=t+1}^T \{X_t \in A, \tau = s\} \\ &= \cup_{s=0}^t \{X_s \in A, \tau = s\} \cup \{X_t \in A, \tau > t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$
po gore pokazanom.

Definirajmo proces $\phi = (\phi_t\,,\, 1 \le t \le T)$ formulom

$$\phi_t := 1_{\{t \le \tau\}}\,,$$

(dakle, ϕ je jednak 1 do vremena τ, a nakon toga je nula). Uočimo da je $\{t \le \tau\} = \{\tau < t\}^c = \{\tau \le t-1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$ (zbog τ vrijeme zaustavljanja). To znači da je slučajni proces ϕ predvidiv. Nadalje, za $1 \le t \le T$ vrijedi

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{s=1}^{t} \phi_s (X_s - X_{s-1}) &= X_0 + \sum_{s=1}^{t} 1_{(s \le \tau)} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_0 + \sum_{s=1}^{t\wedge\tau} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_{t\wedge\tau} = X_t^\tau\,. \end{aligned}$$

Dakle, zaustavljen proces X^τ je martingalna transformacija procesa X pomoću predvidivog procesa ϕ. Sada tvrdnja slijedi iz Propozicije 3.18. □

4.3. **Snellov omotač i optimalno zaustavljanje.** Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces. Definiramo slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T\,, \\ U_t &= \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) \quad 0 \le t \le T-1\,. \end{aligned}$$

Po Propoziciji 4.3, U je najmanji supermartingal koji dominira proces Z. Slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ zovemo **Snellov omotač** od $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$.

Uočimo da je $U_t \ge Z_t$ za sve t i u slučaju stroge nejednakosti vrijedi $U_t = \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]$. To sugerira da se pogodnim zaustavljanjem procesa U može dobiti martingal.

Propozicija 4.6. *Slučajna varijabla definirana formulom*

$$\tau_0 := \min\{t \ge 0\,, U_t = Z_t\}$$

je vrijeme zaustavljanja. Zaustavljen proces $U^{\tau_0} = (U_{t\wedge\tau_0}\,,\, 0 \le t \le T)$ je martingal.

Dokaz. Zbog $U_T = Z_T$ slijedi da je τ_0 dobro definiran i $\tau_0 \in \{0, 1, \dots, T\}$. Nadalje, $\{\tau_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$, a za $t \ge 1$

$$\{\tau_0 = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Dakle, τ_0 je vrijeme zaustavljanja.

Zapišimo zaustavljen proces kao u dokazu Propozicije 4.5:

$$U_t^{\tau_0} = U_{t\wedge\tau_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta U_j$$

gdje je $\phi_j = 1_{\{\tau_0 \ge j\}}$. Slijedi da je za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = \phi_{t+1}(U_{t+1} - U_t) = 1_{\{t+1 \le \tau_0\}}(U_{t+1} - U_t)\,.$$

Po definiciji je $U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])$, te na skupu $\{t+1 \le \tau_0\}$ vrijedi $U_t > Z_t$. Dakle, $U_t = \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]$, pa slijedi

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = 1_{\{t+1 \le \tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])\,.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje obje strane:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[1_{\{t+1\le\tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}\mathbf{E}[U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}(\mathbf{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) = 0\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi zbog $\{t+1 \le \tau_0\} = \{\tau_0 \le t\}^c \in \mathcal{F}_t$. Dakle, $\mathbf{E}[U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t \,|\, \mathcal{F}_t] = 0$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. □

Označimo sa $\mathcal{T}_{t,T}$ familiju svih vremena zaustavljanja koja primaju vrijednosti u skupu $\{t, t+1, \ldots, T\}$. Uočimo da zbog Ω konačan skup slijedi da je i $\mathcal{T}_{t,T}$ također konačan skup.

Korolar 4.7. *Vrijeme zaustavljanja τ_0 zadovoljava*

$$U_0 = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

Dokaz. Budući da je U^{τ_0} martingal, vrijedi

$$U_0 = U_0^{\tau_0} = \mathbf{E}[U_T^{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

S druge strane, za sve $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$, iz Propozicije 4.5 slijedi da je U^σ supermartingal. Dakle,

$$U_0 \ge \mathbf{E}[U_T^\sigma\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0] \ge \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

□

Ukoliko o slučajnom procesu Z mislimo kao o dobitku (Z_t je dobitak u trenutku t), tada nam Korolar 4.7 kaže da vrijeme zaustavljanja τ_0 maksimizira očekivani dobitak uz dano $\mathcal{F}_0$. Ako je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je

$$U_0 = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma]\,.$$

Napomena 4.8. Poopćenje Korolara 4.7 daje

$$U_t = \mathbf{E}[Z_{\tau_t}\,|\,\mathcal{F}_t] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_t]\,,$$

gdje je $\tau_t := \min\{j \ge t\,,\, U_j = Z_j\}$.

Definicija 4.9. Vrijeme zaustavljanja τ je **optimalno** za slučajni proces $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ ako vrijedi

$$\mathbf{E}[Z_\tau\,|\,\mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

Po Korolaru 4.7, τ_0 je optimalno vrijeme zaustavljanja za Z. Sljedeći rezultat nam daje karakterizaciju optimalnih vremena zaustavljanja.

Teorem 4.10. *Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno ako i samo ako vrijedi:*

$$Z_\tau = U_\tau \quad i \quad U^\tau \textit{ je martingal.} \tag{4.2}$$

Napomena 4.11. Zbog $\tau_0 = \min\{t \ge 0\,,\, U_t = Z_t\}$, slijedi da je τ_0 najmanje optimalno vrijeme.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (4.2). Tada je $U_0 = \mathbf{E}[U_\tau\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_\tau\,|\,\mathcal{F}_0]$. Međutim, po Korolaru 4.7,

$$U_0 = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

Dakle, τ je optimalno vrijeme zaustavljanja.

Obratno, pretpostavimo da je τ optimalno. Tada je

$$\begin{aligned} U_0 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0] \quad \text{(po Korolaru 4.7)} \\ &= \mathbf{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \quad (\text{zbog } \tau \text{ optimalno}) \\ &\leq \mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \\ &\leq U_0 \quad (\text{zbog } U \text{ supermartingal}) \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]$, pa zbog $U_\tau \geq Z_\tau$, slijedi $U_\tau = Z_\tau$. Nadalje,

$$\mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = U_0 \geq \mathbf{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \geq \mathbf{E}[\mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]\,,$$

gdje nejednakosti vrijede zbog U supermartingal. Budući da su lijeva i desna strana gore jednake, imamo jednakost

$$\mathbf{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0]\,.$$

Budući da je $U_t^\tau \geq \mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$ (zbog U^τ supermartingal), iz gornje jednakosti uvjetnih očekivanja ta dva izraza slijedi $U_t^\tau = \mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$. Međutim, to znači da je U^τ martingal. $\square$

Sada želimo karakterizirati najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. U karakterizaciji tog optimalnog vremena koristit ćemo se vrlo važnom dekompozicijom supermartingala. Prvo nam je potrebna definicija neopadajućeg procesa.

Definicija 4.12. Slučajni proces $A = (A_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je *neopadajući* ako za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ vrijedi $A_t \leq A_{t+1}$.

Propozicija 4.13. *(Doobova dekompozicija) Neka je $U = (U_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ supermartingal. Tada postoje martingal $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ i neopadajući, predvidiv proces $A = (A_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$, $A_0 = 0$, takvi da vrijedi $U = M - A$. Nadalje, gornja dekompozicija je jedinstvena.*

Dokaz. Definiramo $A_0 = 0$ i $M_0 = U_0$, te induktivno za $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ A_{t+1} &= A_t + U_t - \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tada je

$$\mathbf{E}[M_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t\,,$$

što znači da je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal. Nadalje, zbog $E[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \leq U_t$, slijedi da je $A_{t+1} \geq A_t$. Iz definicije je vidljivo da je A_{t+1} izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle, $A = (A_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je neopadajući predvidiv proces sa $A_0 = 0$.

Očito je $U_0 = M_0 - A_0$. Pretpostavimo $U_t = M_t - A_t$. Tada je

$$\begin{aligned} M_{t+1} - A_{t+1} &= (M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) - (A_t + U_t - \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) \\ &= M_t + U_{t+1} - A_t - U_t = U_{t+1}\,. \end{aligned}$$

Time smo dokazali i dekompoziciju.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da su $U = M - A = M' - A'$ dvije dekompozicije. Tada je

$$M_t - M_t' = A_t - A_t'\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,.$$

Zbog $A_0 = 0 = A'_0$ slijedi $M_0 = M'_0$. Pretpostavimo $A_t = A'_t$, otkud odmah dobivamo $M_t = M'_t$. Zato je

$$0 = M_t - M'_t = \mathbf{E}[M_{t+1} - M'_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[A_{t+1} - A'_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = A_{t+1} - A'_{t+1}\,,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz predvidivosti procesa A i A'. Dakle, $A_{t+1} = A'_{t+1}$. □

Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ slučajni proces, te neka je $U = (U_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ njegov Snellov omotač. Najveće optimalno vrijeme zaustavljanja procesa Z može se karakterizirati pomoću neopadajućeg procesa A iz Doobove dekompozicije supermartingala U.

Propozicija 4.14. *Najveće optimalno vrijeme slučajnog procesa Z dano je formulom*

$$\tau_{\max} = \begin{cases} T & \textit{ako je } A_T = 0 \\ \min\{t \geq 0\,,\, A_{t+1} \neq 0\} & \textit{ako } A_T \neq 0\,. \end{cases}$$

Dokaz. Budući da je A predvidiv i da je za $t < T$

$$\{\tau_{\max} \leq t\} = \{A_{t+1} \neq 0\},$$

$\tau_{\max}$ je vrijeme zaustavljanja. Uočimo da vrijedi $A_t = 0$ za sve $t \leq \tau_{\max}$. Zato iz $U_t = M_t - A_t$ za sve t slijedi $U^{\tau_{\max}} = M^{\tau_{\max}}$. Budući da je M martingal, to je i $M^{\tau_{\max}}$ martingal, pa je $U^{\tau_{\max}}$ također martingal. Po Teoremu 4.10 je stoga za optimalnost vremena $\tau_{\max}$ dovoljno pokazati da je $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} U_{\tau_{\max}} &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} U_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} U_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T\,. \end{aligned}$$

Primijetimo da na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$ vrijedi $A_t = 0$ i $A_{t+1} > 0$. Stoga je na tom događaju $U_t = M_t - A_t = M_t$, te nadalje,

$$\mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[M_{t+1} - A_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t - A_{t+1} < M_t = U_t\,.$$

Zbog gornje nejednakosti i definicije $U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])$, slijedi da je $U_t = Z_t$ na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$. Dakle

$$U_{\tau_{\max}} = \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} Z_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T = Z_{\tau_{\max}}\,.$$

Preostaje pokazati da je $\tau_{\max}$ najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je τ vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbf{P}(\tau > \tau_{\max}) > 0$. Za $\omega \in \Omega$ takav da je $\tau(\omega) > \tau_{\max}(\omega)$ vrijedi $A_\tau(\omega) > 0$. Zato je i $\mathbf{P}(A_\tau > 0) > 0$ otkud slijedi da je $\mathbf{E}[A_\tau] > 0$. Sada imamo

$$\mathbf{E}[U_\tau] = \mathbf{E}[M_\tau] - \mathbf{E}[A_\tau] < \mathbf{E}[M_\tau] = \mathbf{E}[M_0] = \mathbf{E}[U_0]\,,$$

što znači da U^τ nije martingal. Po Teoremu 4.10, τ nije optimalno vrijeme. □

Zadatak 4.15. Vrtimo *Kolo sreće* označeno brojevima $1, 2, \ldots, 50$ i to najviše $T \in \mathbf{N}$ puta. U svakom trenutku $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ možemo stati i uzeti iznos koji smo dobili u tom trenutku. Odredimo optimalno vrijeme zaustavljanja za $T = 4$.

Rješenje: Označimo s $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ proces dobitka u ovoj igri. Uočimo da su slučajne varijable $Z_0, \ldots, Z_T$ nezavisne i da je

$$Z_0 = 0,\ Z_t \sim U(1, \ldots, 50),\ t = 1, \ldots T.$$

Neka je $\mathbb{F}$ prirodna filtracija procesa Z. Iz Teorema 4.10 (odnosno Napomene 4.11) slijedi da je optimalno vrijeme zaustavljanja za ovu igru određeno Snellovim omotačem za proces Z. Prisjetimo se, Snellov omotač za Z je slučajni proces $U = (U_t : 0 \leq t \leq T)$ određen s

$$\begin{aligned} &U_T = Z_T\,, \\ &U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1}]) \quad 0 \leq t \leq T-1\,. \end{aligned}$$

Pokaže se da vrijedi rekurzija

$$\mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[\max\{Z_t, \mathbb{E}U_{t+1}\}] = \frac{51}{2} - \frac{(\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1)\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil}{100} + \frac{\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1}{50}\mathbb{E}U_{t+1}.$$

Sada rekurzivno računamo $\mathbb{E}U_t$ za $t = 1, \ldots, 4$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_4] &= \mathbb{E}Z_4 = \frac{1 + \ldots + 50}{50} = \frac{50 \cdot 51}{2 \cdot 50} = 25.5 \\ \mathbb{E}[U_3] &= \mathbb{E}[\max\{Z_3, \mathbb{E}U_4\}] = \frac{51}{2} - \frac{(\lceil 25.5 \rceil - 1)\lceil 25.5 \rceil}{100} + \frac{\lceil 25.5 \rceil - 1}{50} \cdot 25.5 = 31.75 \\ \mathbb{E}[U_2] &= \mathbb{E}[\max\{Z_2, \mathbb{E}U_3\}] = \ldots = 35.265 \\ \mathbb{E}[U_1] &= \mathbb{E}[\max\{Z_1, \mathbb{E}U_2\}] = \ldots = 37.5855. \end{aligned}$$

Odredimo Snellov omotač:

$$\begin{aligned} U_4 &= Z_4 \\ U_3 &= \max\{Z_3, 25.5\} \\ U_2 &= \max\{Z_2, 31.75\} \\ U_1 &= \max\{Z_1, 35.265\} \\ U_0 &= \max\{Z_0, 37.5855\} = 37.5855. \end{aligned}$$

Jedno optimalno vrijeme zaustavljanja je $\tau_0 = \min\{t : U_t = Z_t\}$, odnosno

$$\tau_0 = \begin{cases} 1, & Z_1 \geq 36 \\ 2, & Z_1 \leq 35,\ Z_2 \geq 32 \\ 3, & Z_1 \leq 35,\ Z_2 \leq 31,\ Z_3 \geq 26 \\ 4, & \text{inače} \end{cases}.$$

Opišimo sada optimalnu strategiju igre:

- Vrtimo kolo 1. put - ukoliko smo na kolu dobili broj veći ili jednak 36, stanemo, u protivnom vrtimo dalje;
- Vrtimo kolo 2. put - ukoliko smo na kolu dobili broj veći ili jednak 32, stanemo, u protivnom vrtimo dalje;
- Vrtimo kolo 3. put - ukoliko smo na kolu dobili broj veći ili jednak 26, stanemo, u protivnom je naš konačni dobitak broj dobiven u 4. vrtnji.

Iz Korolara 4.7 znamo da je optimalni očekivani dobitak jednak $\mathbb{E}Z_{\tau_0} = U_0 = 37.5855$. □

Na kraju ovog odjeljka izračunat ćemo Snellov omotač u slučaju kada je proces Z funkcija Markovljevog lanca. Prvo ćemo se podsjetiti definicije Markovljevog lanca $X = (X_t\,,\,0 \le t \le T)$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\,0 \le t \le T)$ filtracija. Pretpostavit ćemo da X prima vrijednosti u prebrojivom skupu E, te da je P neka prijelazna matrica.

Definicija 4.16. Slučajni proces $X = (X_t\,,\,0 \le t \le T)$ s vrijednostima u E je **homogen Markovljev lanac** u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\,0 \le t \le T)$ s prijelaznom matricom P, ako je X adaptiran u odnosu na $\mathbb{F}$, te ako za svaku funkciju $f : E \to \mathbf{R}$ vrijedi

$$\mathbf{E}[f(X_{t+1})\,|\,\mathcal{F}_t] = Pf(X_t)\,, \qquad \text{za sve } t \in \{0, 1, \dots, T-1\}\,. \tag{4.4}$$

Ovdje je $Pf : E \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s

$$Pf(x) := \sum_{y \in E} P(x, y) f(y)\,.$$

Pretpostavimo da je filtracija $\mathbb{F}$ prirodna filtracija procesa X. Tada su događaji u $\mathcal{F}_t$ generirani atomima $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$, $x_0, x_1, \dots, x_t \in E$. Za specijalnu funkciju f oblika $f = 1_{\{z\}}$, $z \in E$, iz formule (4.4) i definicije uvjetnog očekivanja slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1})\,|\,X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t]1_{\{X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}} \\
&= \mathbf{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1})\,|\mathcal{F}_t]1_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}} \\
&= P1_{\{z\}}(X_t)1_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}}\,.
\end{aligned}$$

To znači da na događaju $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$ vrijedi

$$\mathbf{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1})\,|\,X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P1_{\{z\}}(X_t)\,.$$

Budući da je

$$P1_{\{z\}}(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)1_{\{z\}}(y) = P(x, z)\,,$$

slijedi da je na događaju $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$

$$\mathbf{P}[X_{t+1} = z\,|\,X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P(X_t, z) = P(x_t, z)\,.$$

To znači da za sve $x_0, x_1, \dots, x_t, z \in E$ vrijedi

$$\mathbf{P}[X_{t+1} = z\,|\,X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P(x_t, z)\,,$$

šo je klasična definicija Markovljevog svojstva.

Propozicija 4.17. *Neka je $Z = (Z_t\,,\,0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces definiran formulom*

$$Z_t = \psi(t, X_t)\,,$$

gdje je $X = (X_t\,,\,0 \le t \le T)$ homogen Markovljev lanac s vrijednostima u E i prijelaznom matricom P, a $\psi : \{0, 1, \dots, T\} \times E \to \mathbf{R}$ funkcija. Tada je Snellov omotač U procesa Z dan formulom

$$U_t = u(t, X_t)\,,$$

gdje je $u : \{0, 1, \ldots, T\} \times E \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana sa*

$$\begin{aligned} u(T, x) &:= \psi(T, x)\,, \\ u(t, x) &:= \max(\psi(t, x), Pu(t+1, x))\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1\,. \end{aligned}$$

Dokaz. Stavimo $V_t := u(t, X_t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Tada je

$$V_T = u(T, X_T) = \psi(T, X_T) = Z_T\,,$$

te za $t \le T-1$,

$$\begin{aligned} V_t &= u(t, X_t) = \max(\psi(t, X_t), Pu(t+1, X_t)) \\ &= \max(Z_t, \mathbf{E}[u(t+1, X_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t]) \\ &= \max(Z_t, \mathbf{E}[V_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])\,. \end{aligned}$$

U drugoj jednakosti koristili smo formulu (4.4) za funkciju $f(\cdot) = u(t+1, \cdot)$. Zbog $U_T = Z_T = V_T$, indukcijom slijedi $U_t = V_t$, $t \le T-1$. □

Zadatak 4.18. Igramo *Kolo sreće* s poljima $100, 500, 1000$ i *bankrot* i vrtimo kolo najviše $T = 3$ puta. U svakom trenutku možemo stati i uzeti ukupni iznos koji smo dobili **do** tada. U slučaju da dobijemo polje *bankrot*, gubimo osvojeni iznos i igra prestaje. Odredimo optimalno vrijeme zaustavljanja za ovu igru.

Primjer 4.19. na razgovor za posao prijavilo se $N \in \mathbf{N}$ kandidata. Njihove kvalifikacije određene su realnim brojevima $a_1 > a_2 > \ldots > a_N$, od najbolje do najlošije. Kandidati bivaju intervjuirani redom, na slučajan način, stoga su poslodavcu su njihove kvalifikacije nepoznate. Poslodavac mora za vrijeme intervjua s kandidatom odlučiti hoće li zaposliti tog kandidata. Ukoliko mu ne ponudi posao, mora izabrati novog zaposlenika iz skupa preostalih (do tad neintervjuiranih) kandidata. Odredimo optimalnu strategiju odabira najboljeg kandidata.

Označimo s Y_i kvalifikaciju i-tog intervjuiranog kandidata. Obzirom da je kvalifikacija i-tog intervjuiranog kandidata nepoznata poslodavcu, Y_i je slučajna varijabla. Uočimo da je slučajni vektor $(Y_1, ..., Y_N)$ zapravo jedna slučajna permutacija skupa $\{a_1, ..., a_N\}$. Iako mu je kvalifikacija i-tog intervjuiranog kandidata nepoznata, poslodavac može na temelju intervjua usporediti i-tog intervjuiranog kandidata s prethodno intervjuiranim kandidatima (odnosno odrediti rang od Y_i s obzirom na $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$). Označimo s X_i rang i-tog intervjuiranog kandidata s obzirom na prethodno intervjuirane kandidate,

$$X_i = \sum_{k=1}^{i} 1_{\{Y_i < Y_k\}}.$$

Uočimo da će najbolji kandidat u i-tom krugu intervjua imati rang 1, a najlošiji rang i. Cilj nam je odrediti optimalno vrijeme zaustavljanja τ s obzirom na proces rangova X, koje će maksimizirati vjerojatnost odabira najboljeg kandidata za posao, odnosno maksimizirati

$$\mathbf{P}(Y_\tau = a_1).$$

Uočimo da su, zbog slučajnog rasporeda kandidata, slučajne varijable $X_1, \ldots, X_N$ nezavisne i da je

$$X_i \sim U(\{1, \ldots, i\}), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Slučajni proces $X = (X_i : 1 \leq i \leq N)$ je **nehomogen** Markovljev lanac na skupu stanja $E = \{1, \dots, N\}$ s prijelaznom matricom P_i gdje je

$$p_i(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & x \in \{1,\dots,i-1\},\ y \in \{1,\dots,i\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Za funkciju $f\colon \{0,1,\dots,N\} \times E \to \mathbf{R}$ i $x \in \{1,\dots,i-1\}$, $i \in \{0,1,\dots,N\}$ definiramo

$$Pf(i,x) := \sum_{y \in E} f(i,y) p_i(x,y) = \sum_{k=1}^{i} f(i,k) \frac{1}{i} \,.$$

Uočimo da za $i < N$ slučajna varijabla Y_i nije $\mathcal{F}_i = \sigma\{X_1,\dots,X_i\}$-izmjeriva, obzirom da vrijednost Y_i ne možemo odrediti na temelju vektora $(X_1,\dots,X_i)$. Definirajmo proces $Z = (Z_i : 0 \leq i \leq T)$ kao funkciju Markovljevog lanca X,

$$Z_i = \psi(i, X_i) := \mathbf{P}(Y_i = a_1 | X_i) = \mathbf{P}(Y_i = a_1 | X_1, \dots, X_i),$$

pri čemu je

$$\psi(i,x) = \begin{cases} \frac{i}{N}, & x = 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uistinu,

$$\begin{aligned} \psi(i,1) &= \frac{\mathbf{P}(Y_i = a_1, X_i = 1)}{\mathbf{P}(X_i = 1)} = \frac{\mathbf{P}(Y_i = a_1)}{\mathbf{P}(X_i = 1)} = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{i}} = \frac{i}{N}, \\ \psi(i,x) &= \mathbf{P}(Y_i = a_1, X_i = x) \leq \mathbf{P}(Y_i = a_1, X_i > 1) = 0,\ x \neq 1. \end{aligned}$$

Neka je τ slučajno vrijeme zaustavljanja za proces X. Tada je $\{\tau = k\} \in \sigma\{X_1,\dots,X_k\}$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_\tau = a_1) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(Y_k = a_1,\ \tau = k) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[1_{\{Y_k = a_1\}} 1_{\{\tau = k\}}] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[\mathbf{E}[1_{\{Y_k = a_1\}} 1_{\{\tau = k\}} | X_1, \dots, X_k]] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[1_{\{\tau = k\}} \mathbf{E}[1_{\{Y_k = a_1\}} | X_1, \dots, X_k]] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[1_{\{\tau = k\}} \psi(k, X_k)] = \mathbf{E}[\psi(\tau, X_\tau)] = \mathbf{E}[Z_\tau]. \end{aligned}$$

Stoga je optimalno vrijeme zaustavljanja za naš problem upravo optimalno vrijeme zaustavljanja za proces Z. Po Korolaru 4.7 znamo da je jedno optimalno vrijeme zaustavljanja τ_0. Koristimo Propoziciju 4.17 da odredimo Snellov omotač U za Z, $U_i = u(i, X_i)$ gdje je

$$\begin{aligned} u(N,x) &= \psi(N,x)\,, \\ u(i,x) &= \max(\psi(i,x), Pu(i+1,x)) \\ &= \max\left(\psi(i,x), \sum_{k=1}^{i+1} u(i+1,k) \frac{1}{i+1}\right), \quad i = 0,1,\dots,N-1\,. \end{aligned}$$

Tada vrijedi da je

$$\mathbf{P}(Y_{\tau_0} = a_1) = U_0 = u(0, X_0) = \max(\psi(0, X_0), Pu(1, X_0)) = \max(0, Pu(1, 0)) = u(1, 1).$$

Odredimo sada $u(i, x)$:

- $u(N, 1) = \psi(N, 1) = \frac{N}{N} = 1$, $u(N, x) = \psi(N, x) = 0$, $x \in \{2, \dots, N\}$;
- $u(N-1, 1) = \max(\psi(N-1, 1), Pu(N, 1)) = \max(\frac{N-1}{N}, u(N, 1) \cdot \frac{1}{N}) = \max(\frac{N-1}{N}, \frac{1}{N})$
  Uočimo $u(N-1, 1) = \psi(N-1, 1) = \frac{N-1}{N}$ ako je $\frac{1}{N-1} \leq 1$, u suprotnom je $u(N-1, 1) = \frac{1}{N} > \psi(N-1, 1)$
  $u(N-1, x) = \max(\psi(N-1, x), Pu(N, x)) = \max(0, u(N, 1) \cdot \frac{1}{N}) = \frac{1}{N} > \psi(N-1, x)$;
- Ako je $\frac{1}{N-1} \leq 1$ $(N-1 \geq 1)$ imamo:

$$\begin{aligned} u(N-2, 1) &= \max(\psi(N-2, 1), Pu(N-1, 1)) \\ &= \max\left(\frac{N-2}{N}, (u(N-1, 1) + \dots + u(N-1, N-1)) \cdot \frac{1}{N-1}\right) \\ &= \max\left(\frac{N-2}{N}, \left(\frac{N-1}{N} + (N-2)\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N}\right) \\ &= \max\left(\frac{N-2}{N}, \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right)\right) \end{aligned}$$

  i $u(N-2, x) = \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right) > \psi(N-2, x)$, $x > 1$.
  Uočimo $u(N-2, 1) = \psi(N-2, 1) = \frac{N-2}{N}$ ako je $\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} \leq 1$, u suprotnom je $u(N-2, 1) > \psi(N-2, 1)$.
  $u(N-2, x) = \max(\psi(N-2, x), Pu(N-1, x)) = \max\left(0, \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right)\right) = \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right)$;
  Ako je $\frac{1}{N-1} > 1$ onda je za sve x

$$u(N-2, x) = \max(\psi(N-2, x), Pu(N-1, x)) = \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right);$$

- Ovaj postupak ima smisla provoditi dok god je $u(m, 1) = \psi(m, 1)$, odnosno do trenutka m kad je

$$\sum_{k=m}^{N-1} \frac{1}{k} \leq 1 < \sum_{k=m-1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

  Tada je za sve $n \geq m$

$$\begin{aligned} u(n, 1) &= \psi(n, 1) = \frac{n}{N}, \\ u(n, x) &= \frac{n}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{n}\right) > \psi(n, x),\ x > 1, \end{aligned}$$

  te je

$$\begin{aligned} u(m-1, 1) &= \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{m-1}\right) > \psi(m, 1), \\ u(m-1, x) &= \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{m-1}\right) > \psi(m, x),\ x > 1. \end{aligned}$$

- Uočimo da je $u(m-1, \cdot)$ konstantna funkcija, pa je za $n < m$ i sve $x \in \{1, \dots, n\}$

$$u(n, x) = \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{m-1}\right).$$

Kako je $\tau_0 = \min\{n : U_n = Z_n\} = \min\{n : u(n, X_n) = \psi(n, X_n)\}$ i

$$U_n > Z_n \text{ za } n < m$$
$$U_n = Z_n \text{ akko } n \geq m \text{ i } X_n = 1,$$

slijedi da je $\tau_0 = \min\{n \geq m : X_n = 1\}$. Prema tome pobjednička strategija je propustiti prvih $m-1$ kandidata i onda ponuditi posao prvom sljedećem kandidatu koji bude najbolje rangiran u odnosu na prethodno intervjuirane kandidate. Time maksimiziramo vjerojatnost odabira najboljeg kandidata koja je jednaka

$$\mathbf{P}(Y_{\tau_0} = a_1) = u(1,1) = \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right) \approx \frac{1}{e} \approx 36.8\% \qquad \text{(za veliki } N\text{)}.$$

4.4. **Primjena na američke opcije.** U ovom odjeljku vraćamo se na model potpunog tržišta bez arbitraže kakav smo promatrali u odjeljku 4.1. Preciznije, dan je (konačan), filtrirani vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, te $d+1$ financijska imovina čije su cijene $S^i = (S^i_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ adaptirani slučajni procesi. Budući da je tržište bez arbitraže i potpuno, postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera koju označavamo s $\mathbf{P}^*$. To znači da su diskontirane cijene financijskih imovina $\widetilde{S}^i = (\widetilde{S}^i_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$, $i = 1, 2, \ldots, d$, martingali s obzirom na $\mathbf{P}^*$.

Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ američka opcija. Podsjetimo se, vrijednost američke opcije dana je slučajnim nizom $U = (U_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ izračunatim u odjeljku 4.1:

$$\begin{aligned} &U_T = Z_T\,, \\ &U_t = \max\left(Z_t, S^0_t\,\mathbf{E}^*\left[\tfrac{U_{t+1}}{S^0_{t+1}} \,|\, \mathcal{F}_t\right]\right)\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,. \end{aligned}$$

Iz defnicije procesa U slijedi da je $U_t \geq Z_t$. Vrijednost Z_t zovemo **unutarnja vrijednost opcije** (engl. *intrinsic value*), dok razliku $U_t - Z_t$ zovemo **vremenska vrijednost opcije** (engl. *time value*). Dakle, vrijednost američke opcije u trenutku t jednaka je zbroju unutarnje vrijednosti i vremenske vrijednosti.

Niz $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ diskontiranih cijena opcije definiran formulom $\widetilde{U}_t = U_t / S^0_t$ zadovoljava

$$\begin{aligned} &\widetilde{U}_T = \widetilde{Z}_T\,, \\ &\widetilde{U}_t = \max(\widetilde{Z}_t, \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,. \end{aligned}$$

Dakle, slučajni proces $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je Snellov omotač slučajnog procesa $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ (s obzirom na vjerojatnost $\mathbf{P}^*$). Iz Napomene 4.8 slijedi

$$\widetilde{U}_t = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t]\,,$$

otkud imamo

$$U_t = S^0_t \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}^*\left[\frac{Z_\sigma}{S^0_\sigma} \,|\, \mathcal{F}_t\right]\,. \tag{4.5}$$

Primjenimo Doobovu dekompoziciju na $\mathbf{P}^*$-supermartingal $\widetilde{U}$. Vrijedi $\widetilde{U} = \widetilde{M} - \widetilde{A}$, gdje je $\widetilde{M}$ $\mathbf{P}^*$-martingal, a $\widetilde{A}$ je neopadajući predvidiv proces. Budući da je tržište potpuno slijedi da je slučajni zahtjev $S^0_T \widetilde{M}_T$ dostižan, pa postoji samofinancirajuća strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = S^0_T \widetilde{M}_T$, odnosno nakon diskontiranja, $\widetilde{V}_T(\phi) = \widetilde{M}_T$. Budući da je slučajni niz $(\widetilde{V}_t(\phi)\,,\, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal (vidi dokaz Teorema 3.22), vrijedi

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi) \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\widetilde{M}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \widetilde{M}_t\,.$$

Dakle, martingal $\widetilde{M}$ jednak je procesu diskontiranih vrijednosti portfelja ϕ koji replicira slučajni zahtjev $S_T^0\widetilde{M}_T$. Specijalno imamo $\widetilde{U}_t = \widetilde{V}_t(\phi) - \widetilde{A}_t$, otkud slijedi

$$U_t = V_t(\phi) - A_t\,, \tag{4.6}$$

gdje smo definirali $A_t := S_t^0\widetilde{A}_t$. Gornja formula kaže da je cijena U_t američke opcije jednaka vrijednosti (nekog) portfelja minus nešto nenegativno.

Promotrimo detaljnije što nam kaže formula (4.6) s pozicije pisca opcije. Pisac opcije prodaje američku opciju $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ u trenutku $t = 0$ za njenu vrijednost U_0. Iz (4.6) prvo slijedi da je $U_0 = V_0(\phi)$ za neki portfelj ϕ. Pisac opcije kupuje u trenutku $t = 0$ samofinancirajući portfelj ϕ po cijeni U_0 (upravo za koliko je prodao američku opciju Z). U svakom daljnjem trenutku pisac slijedi strategiju ϕ, što mu u trenutku t vrijedi $V_t(\phi)$. Iz formule (4.6) vidimo da je $V_t(\phi) \ge U_t$, a s druge strane, $U_t \ge Z_t$. Dakle, $V_t(\phi) \ge Z_t$, za sve $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. To znači da pisac opcije u svakom trenutku t može pokriti obvezu koja izlazi iz američke opcije Z. Štoviše, ako kupac opcije odluči iskoristiti opciju u trenutku t u kojem je $Z_t < V_t(\phi)$, pisac opcije ostvaruje profit od $V_t(\phi) - Z_t > 0$. Očito je da takav trenutak t ne bi smio biti optimalan za iskoristiti opciju, jer bismo u protivnom imali arbitražu.

Pronađimo sada optimalno vrijeme za iskoristiti opciju. To će biti vrijeme zaustavljanja iz skupa svih vremena zaustavljanja $\mathcal{T}_{0,T}$. Za kupca opcije besmisleno je iskoristiti opciju u trenutku t u kojem je $U_t > Z_t$, jer je tada vrijednost opcije U_t veća od njene unutarnje vrijednosti Z_t (što znači da je bolje prodati opciju za U_t nego ju iskoristiti i dobiti Z_t - vremenska vrijednost opcije veća je od nule). Dakle, optimalno vrijeme τ mora zadovoljavati $U_\tau = Z_\tau$. Najmanje takvo vrijeme je

$$\tau_0 = \min\{t \ge 0\,,\, U_t = Z_t\}\,.$$

S druge strane, nema smisla iskoristiti opciju nakon vremena

$$\tau_{\max} = \min\{t \ge 0\,,\, \widetilde{A}_{t+1} \ne 0\} = \min\{t \ge 0\,,\, A_{t+1} \ne 0\}\,.$$

Zaista, ako kupac opcije iskoristi opciju u trenutku $\tau_{\max}$ (uočimo da je tada $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$ - vidi Propoziciju 4.14 i njen dokaz), tada će dobiti iznos $U_{\tau_{\max}}$ koji je jednak $V_{\tau_{\max}}(\phi)$ (zbog $A_{\tau_{\max}} = 0$). Za tu vrijednost kupac opcije može kupiti portfelj ϕ, te slijedivši tu strategiju ϕ, generira bogatstvo koje je u trenucima $\tau_{\max}+1, \tau_{\max}+2, \dots, T$ striktno veće nego vrijednost opcije u tim trenucima: $V_t(\phi) = U_t + A_t > U_t$, $t = \tau_{\max}+1, \tau_{\max}+2, \dots, T$. Dakle, iskorištenje opcije nakon trenutka $\tau_{\max}$ generira manju vrijednost nego iskorištenje opcije u trenutku $\tau_{\max}$ i slijeđenje strategije ϕ.

Dakle, drugi uvjet na optimalno vrijeme za iskoristiti opciju je $\tau \le \tau_{\max}$. Dakle, za optimalno vrijeme τ vrijedi $\tau_0 \le \tau \le \tau_{\max}$, te $A^\tau = 0$. Iz $\widetilde{U} = \widetilde{M} - \widetilde{A}$, dobivamo $\widetilde{U}^\tau = \widetilde{M}^\tau$, što znači da je $\widetilde{U}^\tau$ $\mathbf{P}^*$-martingal. Usporedimo li s Teoremom 4.10, vidimo da su optimalna vremena za iskoristiti opciju optimalna vremena zaustavljanja za slučajni niz $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_t\,,\, 0 \le t \le T)$.

Vratimo se još jednom na poziciju pisca opcije koji se štiti prateći strategiju ϕ. Ako kupac iskoristi opciju u trenutku σ koje nije optimalno, tada je ili $U_\sigma > Z_\sigma$, ili $A_\sigma > 0$. U prvom slučaju pisac ima profit $V_\sigma(\phi) - Z_\sigma = (4.6) = U_\sigma + A_\sigma - Z_\sigma > 0$ (zbog $U_\sigma > Z_\sigma$), a u drugom slučaju profit je opet $V_\sigma(\phi) - Z_\sigma = U_\sigma + A_\sigma - Z_\sigma > 0$ (ovaj put zbog $A_\sigma > 0$).

Rezimirajmo gornja razmatranja u sljedećem teoremu.

Teorem 4.20. *Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ američka opcija. Vrijeme zaustavljanja τ optimalno je za iskoristiti opciju Z ako i samo ako vrijedi:*

$$\widetilde{Z}_\tau = \widetilde{U}_\tau \quad i \quad \widetilde{U}^\tau \text{ je } \mathbf{P}^*\text{-martingal.}$$

Promotrimo sada detaljnije vezu između američke opcije $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ i europske opcije dane slučajnim zahtjevom $C = Z_T$.

Propozicija 4.21. *Neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$, te neka je C_t vrijednost u trenutku t europske opcije dane slučajnim zahtjevom $C = Z_T$. Tada vrijedi $U_t \geq C_t$ za sve $t = 0, 1, \dots, T$. Nadalje, ako je $C_t \geq Z_t$ za svaki t, tada je $U_t = C_t$ za sve $t = 0, 1, \dots, T$.*

Dokaz. Budući da je diskontirani proces $\widetilde{U}$ $\mathbf{P}^*$-supermartingal, vrijedi

$$\widetilde{U}_t \geq \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\widetilde{C}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \widetilde{C}_t$$

što dokazuje prvu tvrdnju.

Pretpostavimo da je $C_t \geq Z_t$ za svaki t. Slijedi da je $\widetilde{C} \geq \widetilde{Z}$, t.j. $\widetilde{C}$ dominira $\widetilde{Z}$. Budući da je $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal, to je $\widetilde{C}$ ujedno i $\mathbf{P}^*$-supermartingal. Međutim, $\widetilde{U}$ je Snellov omotač niza $\widetilde{Z}$, dakle najmanji $\mathbf{P}^*$-supermartingal koji dominira $\widetilde{Z}$. Zato je $\widetilde{U} \leq \widetilde{C}$, što dokazuje i drugu tvrdnju. □

Promotrimo sada američku call opciju na prvu financijsku imovinu sa cijenom izvršenja K. Tada je $Z_t = (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \dots, T$. Neka je, kao i do sada, C_t vrijednost u trenutku t europske call opcije $(S_T^1 - K)^+$, te neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije. Vrijedi

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_t &= (1+r)^{-T}\mathbf{E}^*[(S_T^1 - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}^*[(\widetilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T})^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &\geq \mathbf{E}^*[\widetilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= \widetilde{S}_t^1 - K(1+r)^{-T}\,. \end{aligned}$$

Pomnožimo obje strane s $S_t^0 = (1+r)^t$. Slijedi

$$C_t \geq S_t^1 - K(1+r)^{-T+t} \geq S_t^1 - K$$

uz strogu nejednakost za $t = 0, 1, \dots, T-1$. Zbog $C_t \geq 0$, dobivamo $C_t \geq (S_t^1 - K)^+ = Z_t$. Iz Propozicije 4.21 slijedi da je $C_t = U_t$ za sve $t = 0, 1, \dots, T$. Dakle, **američka call opcija vrijedi jednako kao i europska call opcija.**

Napomena 4.22. Isti račun za put opciju $Z_t := (K - S_t^1)^+$ daje

$$P_t \geq K(1+r)^{-T+t} - S_t^1$$

i ne možemo zaključiti $P_t \geq K - S_t^1$. Općenito, američka put opcija vrijedi više od europske put opcije.

Izračunajmo, na kraju, optimalno vrijeme za iskoristiti američku call opciju. Iz $U_t = C_t$ slijedi $\widetilde{U}_t = \widetilde{C}_t$, te je stoga $\widetilde{U}$ $\mathbf{P}^*$-martingal. Zbog $\widetilde{U} = \widetilde{V}(\phi) - \widetilde{A}$ slijedi $\widetilde{A} = 0$, odnosno $A_t = 0$, $t = 0, 1, \dots, T$. To znači da je $\tau_{\max} = T$, odnosno optimalno je čekati do dana dospijeća američke call opcije.

Neka je sada τ proizvoljno optimalno vrijeme za američku call opciju. Po Teoremu 4.20 je tada $\widetilde{U}_\tau = \widetilde{Z}_\tau$, odnosno zbog $\widetilde{U} = \widetilde{C}$,

$$C_\tau = Z_\tau = (S^1_\tau - K)^+ .$$

Pokazali smo da je $C_t > S^1_t - K$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, te $C_T = (S^1_T - K)^+$. Zato je

$$C_\tau \geq S^1_\tau - K$$

uz strogu nejednakost za $\tau \leq T-1$. Prema tome, za $\tau \leq T-1$ imamo

$$(S^1_\tau - K)^+ = C_\tau > S^1_\tau - K ,$$

što je moguće samo u slučaju $S^1_\tau - K < 0$. Slijedi da je $C_\tau = (S^1_\tau - K)^+ = 0$. Odavde je jednostavno pokazati da je tada i $C_t = 0$ za sve $t > \tau$.

Zaključujemo da ako je τ optimalno vrijeme za iskoristiti američku call opciju da je tada ili $\tau = T$ ili je u trenutku τ vrijednost američke (i europske) call opcije jednaka nuli.

4.5. **Američka put opcija u CRR modelu.** U ovom odjeljku želimo izračunati vrijednost američke put opcije u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu. To je model opisan u odjeljku 3.4, te ovdje koristimo notaciju uvedenu u tom odjeljku. Podsjetimo se, slučajni povrati modelirani su nizom nezavisnih slučajnih varijabli $(X_t : 1 \leq t \leq T)$ s vrijednostima a ili b. Vrijednost rizične imovine u trenutku t jednaka je $S_t = S_{t-1}(1+X_t)$. Nerizična imovina dana je s $S^0_t = (1+r)^t$ gdje je r kamatna stopa. Uz uvjet $a < r < b$ model ne dopušta arbitražu i potpun je. Jedinstvena martingalna mjera $\mathbf{P}^*$ dana je s $\mathbf{P}^*(X_t = b) = p^*$, $\mathbf{P}^*(X_t = a) = 1 - p^*$, gdje je $p^* = \frac{r-a}{b-a}$.

Primijetimo da je $(S_t : 0 \leq t \leq T)$ Markovljev lanac u odnosu na prirodnu filtraciju $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \ldots, S_t) = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$. Prostor stanja tog lanca je $E = \{S_0(1+a)^i(1+b)^j : 0 \leq i, j \leq T\}$, a prijelazna matrica Q dana je s

$$Q(x, x(1+a)) = 1 - p^* , \quad Q(x, x(1+b)) = p^* \quad , x \in E .$$

Neka je cijena izvršenja američke put opcije jednaka K. Tada je američka put opcija slučajni niz $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ gdje je $Z_t := (K - S_t)^+$. Definiramo li funkciju $\psi : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sa $\psi(t, x) = (K - x)^+$, tada je $Z_t = \psi(t, S_t)$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Dakle, američka put opcija je funkcija Markovljevog lanca $(S_t : 0 \leq t \leq T)$. Označimo vrijednost te opcije u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ sa P_t, odnosno $P_t = U_t$ iz odjeljka 4.1. U istom odjeljku smo odredili vrijednost američke opcije $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$:

$$\begin{aligned} &P_T = Z_T , \\ &P_t = \max\left(Z_t, S^0_t\, \mathbf{E}^*\left[\tfrac{P_{t+1}}{S^0_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t\right]\right) , \quad t = 0, 1, \ldots, T . \end{aligned}$$

Diskontirajmo Z i P: $\widetilde{Z}_t = (1+r)^{-t} Z_t$, $\widetilde{P}_t = (1+r)^{-t} P_t$. Tada je $\widetilde{P}$ Snellov omotač (uz $\mathbf{P}^*$) od $\widetilde{Z}$. Stavimo

$$\widetilde{\psi}(t, x) = (1+r)^{-t} \psi(t, x) = (1+r)^{-t}(K - x)^+ .$$

Tada je $\widetilde{Z}_t = (1+r)^{-t}(K - S_t)^+ = \widetilde{\psi}(t, S_t)$. Dakle, $\widetilde{Z}$ je funkcija Markovljevog lanca S, pa je Snellov omotač od $\widetilde{Z}$ po Propoziciji 4.17 jednak

$$\widetilde{P}_t = u(t, S_t) ,$$

gdje je $u : \{0, 1, \dots, T\} \times E \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa

$$\begin{aligned} u(T, x) &= \widetilde{\psi}(T, x), \\ u(t, x) &= \max(\widetilde{\psi}(t, x), Qu(t+1, x)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Kako je $P_t = (1+r)^t \widetilde{P}_t = (1+r)^t u(t, S_t)$, definiramo funkciju $p_{\mathrm{am}} : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ sa

$$p_{\mathrm{am}}(t, x) = (1+r)^t u(t, x).$$

Na taj način je dokazana prva tvrdnja sljedeće propozicije.

Propozicija 4.23. *Za sve $t = 0, 1, \dots, T$ imamo*

$$P_t = p_{\mathrm{am}}(t, S_t).$$

Nadalje, za funkciju p_{am} vrijedi

$$p_{\mathrm{am}}(T, x) = (K - x)^+, \tag{4.7}$$

$$p_{\mathrm{am}}(t, x) = \max\left((K-x)^+, \frac{f(t+1, x)}{1+r}\right), \quad 0 \le t < T, \tag{4.8}$$

gdje je $f : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana formulom

$$f(t, x) := (1 - p^*) p_{\mathrm{am}}(t, x(1+a)) + p^* p_{\mathrm{am}}(t, x(1+b)). \tag{4.9}$$

Dokaz. Preostaje dokazati da p_{am} ima gornji oblik. Po definiciji, $p_{\mathrm{am}}(t, x) = (1+r)^t u(t, x)$. Zato je $p_{\mathrm{am}}(T, x) = (1+r)^t u(T, x) = \psi(T, x) = (K - x)^+$. Nadalje,

$$\begin{aligned} & Qu(t+1, x) \\ &= Q(x, x(1+a))\, u(t+1, x(1+a)) + Q(x, x(1+b))\, u(t+1, x(1+b)) \\ &= (1 - p^*)\, u(t+1, x(1+a)) + p^*\, u(t+1, x(1+b)) \\ &= (1+r)^{-t-1}((1-p^*)\, p_{\mathrm{am}}(t+1, x(1+a)) + p^*\, p_{\mathrm{am}}(t+1, x(1+b))) \\ &= (1+r)^{-t-1} f(t+1, x). \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{am}}(t, x) &= (1+r)^t u(t, x) \\ &= \max((1+r)^t \widetilde{\psi}(t, x), (1+r)^t Qu(t+1, x)) \\ &= \max\left((K-x)^+, \frac{f(t+1, x)}{1+r}\right). \end{aligned}$$

□

Odredimo sada hedging portfelj $\phi = (\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1), 0 \le t \le T)$ za američku put opciju. Prisjetimo se da je ϕ portfelj koji replicira slučajni zahtjev $M_T = (1+r)^T \widetilde{M}_T$, gdje je $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t, 0 \le t \le T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal iz Doobove dekompozicije $\mathbf{P}^*$ supermartingal $\widetilde{P}$:

$$\widetilde{P} = \widetilde{M} - \widetilde{A}.$$

Izračunajmo proces $M = (M_t, 0 \le t \le T)$ gdje je $M_t = (1+r)^t \widetilde{M}_t$. Zbog $\widetilde{M}_0 = \widetilde{P}_0$, imamo $M_0 = P_0$. Nadalje (vidi (4.3)),

$$\widetilde{M}_{t+1} = \widetilde{M}_t + \widetilde{P}_{t+1} - \mathbf{E}^*[\widetilde{P}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t].$$

Množenjem s $(1+r)^{t+1}$ dobivamo

$$M_{t+1} = (1+r)M_t + P_{t+1} - \mathbf{E}^*[P_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\,.$$

Kako je $P_{t+1} = p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_{t+1})$, zbog Markovljevog svojstva imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*[p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}^*[p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+X_{t+1})) \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= (1-p^*)\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))\,.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned}M_{t+1} = {} & (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_{t+1}) \\ & -[(1-p^*)\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

S druge strane, budući da ϕ replicira M_T,

$$M_{t+1} = \phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1} S_{t+1}\,.$$

Izjednačavanjem s (4.10) dobivamo

$$\begin{aligned}\phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1} S_{t+1} = {} & (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_{t+1}) \\ & -[(1-p^*)\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned}$$

Množimo s $1_{(X_{t+1}=a)}$, računamo uvjetno očekivanje $\mathbf{E}^*[\cdot \,|\, \mathcal{F}_t]$ i kratimo s $\mathbf{P}^*(X_{t+1} = a)$ (vidi sličan račun za replicirajući portfelj europske call opcije na kraju drugog poglavlja). Slijedi:

$$\begin{aligned}\phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1} S_t(1+a) = {} & (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) \\ & -[(1-p^*)\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned}$$

Na isti način dobijemo

$$\begin{aligned}\phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1} S_t(1+b) = {} & (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b)) \\ & -[(1-p^*)\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\, p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned}$$

Oduzimanjem slijedi

$$\phi^1_{t+1} S_t(b-a) = p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b)) - p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a))\,,$$

otkud

$$\phi^1_{t+1} = \frac{p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b)) - p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a))}{S_t(b-a)}\,.$$

Definiramo funkciju $\Delta : \{1, \ldots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ formulom

$$\Delta(t, x) = \frac{p_{\,\mathrm{am}}(t, x(1+b)) - p_{\,\mathrm{am}}(t, x(1+a))}{x(b-a)}\,. \tag{4.11}$$

Tada vrijedi $\phi^1_{t+1} = \Delta(t+1, S_t)$ i funkciju Δ zovemo **delta opcije**. Na taj način smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 4.24. *Hedging portfelj za američku put opciju dan je s*

$$\begin{aligned}\phi^1_{t+1} &= \Delta(t+1, S_t)\,, \\ \phi^0_{t+1} &= \frac{M_{t+1} - \Delta(t+1, S_t) S_{t+1}}{(1+r)^{t+1}}, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1.\end{aligned}$$

Zadatak 4.25. Nalazimo se u CRR modelu s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$, $S_0 = 100$ i $T = 3$.

(a) Odredite cijene američke put opcije s cijenom izvršenja $K = 90$ u svim trenutcima.

(b) Odredite hedging portfelj za tu opciju na događaju $\{(b, a, a)\}$.

(c) Odredite optimalno vrijeme za iskoristiti tu opciju.