FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 1. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, tri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i tri financijske imovine. Nerizična imovina ima fiksni povrat $r > 0$ (kamatna stopa), a rizične imovine se modeliraju na sljedeći način:

$$S_0^1 = 45,\ S_1^1(\omega_1) = 60,\ S_1^1(\omega_2) = 60,\ S_1^1(\omega_3) = 40,$$
$$S_0^2 = 90,\ S_1^2(\omega_1) = 120,\ S_1^2(\omega_2) = 80,\ S_1^2(\omega_3) = 80.$$

(a) (3 boda) Za koje sve vrijednosti kamatne stope r tržište ne dopušta arbitražu? Obrazložite.

(b) (3 boda) Neka je $\phi = (\phi^0, \phi^1, \phi^2)$ portfelj gdje je ϕ^0 pozicija u nerizičnoj imovini, a ϕ^i pozicija u i-toj rizičnoj imovini S^i, $i = 1, 2$. Za koje vrijednosti kamatne stope $r > 0$ je portfelj $\phi = (45, 1, -1)$ arbitraža? Svoju tvrdnju detaljno obrazložite.

(c) (2 boda) Odredite, ako postoji, jedan dostižan slučajni zahtjev te pripadni replicirajući portfelj (uz $r = 0.01$). U suprotnom, detaljno obrazložite zašto takav zahtjev ne postoji.

(d) (5 boda) Pretpostavimo da je $r = 0.01$ te da se na tržištu trguje samo nerizičnom imovinom i rizičnom imovinom S^1. Odredite skup nearbitražnih cijena slučajnog zahtjeva $C = (S_1^1 - 50)_+$. Je li zahtjev C dostižan? Obrazložite.

Rješenje.

(a) Tržište ne dopušta arbitražu akko postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$. Označimo $p_i^* = \mathbf{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$. Za martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$ vrijedi

$$\mathbf{E}^*[S_1^j] = S_0^j(1 + r),\ j = 1, 2,$$

što daje sustav

$$\begin{aligned} 60p_1^* + 60p_2^* + 40p_3^* &= 45(1 + r) \\ 120p_1^* + 80p_2^* + 80p_3^* &= 90(1 + r) \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(\frac{1+9r}{4}, 0, \frac{3-9r}{4}\right)$. Da bi mjera $\mathbf{P}^*$ bila ekvivalentna martingalna mjera nužno je i dovoljno da dodatno vrijedi $0 < p_i^* < 1$ za $i = 1, 2, 3$. Prema tome slijedi da tržište dopušta arbitražu za sve r.

(b) Da bi portfelj ϕ bio arbitraža treba vrijediti: $V_0(\phi) = 0$, $V_1(\phi) \geq 0$ g.s. i $\mathbf{P}(V_1(\phi) > 0) > 0$. Dobivamo sustav jednadžbi i nejednadžbi:

$$\begin{aligned} \phi_0 + 45\phi_1 + 90\phi_2 &= 0 \\ (1 + r)\phi_0 + 60\phi_1 + 120\phi_2 &\geq 0 \\ (1 + r)\phi_0 + 60\phi_1 + 80\phi_2 &\geq 0 \\ (1 + r)\phi_0 + 40\phi_1 + 80\phi_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

gdje bar jedna nejednakost mora biti stroga. Uvrštavanjem vrijednosti $\phi = (45, 1, -1)$ vidimo da je prva jednadžba zadovoljena. Prva nejednakost je zadovoljena za vrijednosti $r \geq \frac{1}{3}$, za koje su druga i treća nejednakost stroge. Stoga je rješenje $r \geq \frac{1}{3}$.

(c) Svaki degenerirani slučajni zahtjev C je dostižan i replicirajući portfelj je jednak $(\frac{C}{1.01}, 0, 0)$. Također, Slučajni zahtjev $C = S_1^1$ je dostižan i replicirajući portfelj je jednak $(0, 1, 0)$.

(d) Odredimo prvo skup EMM za ovo tržište rješavanjem sustava

$$
\begin{aligned}
&60p_1^* + 60p_2^* + 40p_3^* = 45(1+r) \\
&p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1
\end{aligned}
$$

uz uvjet $0 < p_i^* < 1$ za $i = 1, 2, 3$. Dobivamo $\mathcal{P} = \{(t, \frac{19}{40} - t, \frac{21}{40}) : t \in (0, \frac{19}{40})\}$. Prema Teremu 2.13 je skup nearbitražnih cijena za C jednak

$$\Pi(C) = \{1.01^{-1}\mathbf{E}^*[C] : \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}\} = \{(10t + 10(\tfrac{19}{40} - t) + 0 \cdot \tfrac{21}{40})/1.01 : t \in (0, \tfrac{19}{40})\} = \{2.698\}.$$

Kako je $\Pi(C)$ jednočlan, po Teoremu 2.14 (a)+(b) slijedi da je C dostižan.

FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 2. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenucima trgovanja $t = 0, 1, \ldots, T$.

(a) (3 boda) Definirajte samofinancirajući portfelj, dopustivi portfelj i martingalnu mjeru.

(b) (8 boda) Iskažite i dokažite fundamentalni teorem koji daje karakterizaciju modela financijskih tržišta bez arbitraže.

(c) (2 bodova) Obrazložite kako definiramo cijenu C_t u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ slučajnog zahtjeva C u potpunim modelima financijskih tržišta.

Rješenje.

(a) Definicije 3.5, 3.9 i 3.20.

(b) Teorem 3.22.

(c) Formula (3.4) i paragraf ispod nje.

FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 3. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a < b$ (moguće relativne promjene cijena dionice), $r > 0$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T \in \mathbf{N}$. Neka je $S = (S_t : t \in \{0, \dots, T\})$ proces cijena dionice na tom tržištu.

(a) (4 boda) Ako je $a < r < b$ dokažite da su relativne promjene cijena $X_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$, $t = 1, \dots, T$ nezavisne jednako distribuirane obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru.

(b) (3 boda) Ako je $a < r < b$ pokažite da je model tržišta potpun.

(c) (3 boda) Odredite jednu arbitražu ako je $r \geq b$.

(d) (2 boda) Promatramo put opciju $P = (K - S_T)_+$. Zapišite formulu za funkciju $p : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takvu da za je sve $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijednost put opcije u trenutku t dana s $P_t = p(t, S_t)$.

Rješenje.

(a) Lema 3.30 (b).

(b) Propozicija 3.32 (b).

(c) Paragraf ispod Leme 3.31, $\phi_t = (S_0, -1)$.

(d) $p(t, x) = (1 + r)^{-(T-t)} \sum_{j=0}^{T-t} (K - x(1 + a)^{T-t-i}(1 + b)^i)_+ \binom{T-t}{i} p^{*i}(1 - p^*)^{T-t-i}$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

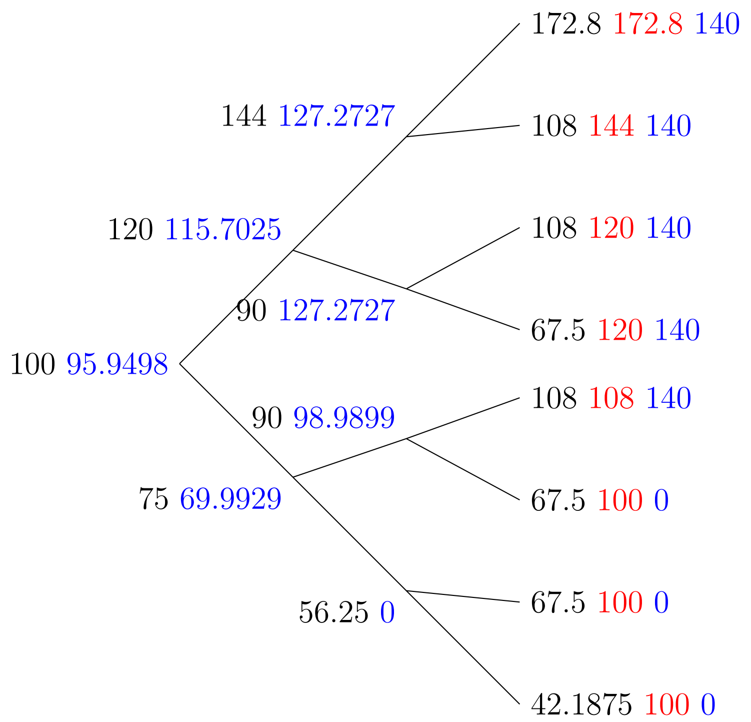
Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.25$, $b = 0.2$ (relativne promjene cijena dionice), $r = 0.1$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T = 3$. Neka je $M = \max\{S_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ najviša razina cijene dionice do trenutka T i $S_0 = 100$ kn početna cijena dionice. Promatramo *binarnu opciju s barijerom* $C = 140 \cdot 1_{\{M>105\}}$.

(a) (3 boda) Odredite $\mathbf{P}^*(C = 0)$, gdje je $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera.

(b) (6 boda) Odredite cijenu opcije C u svakom trenutku.

(c) (3 boda) Izračunajte replicirajuću strategiju ako je $S_1 = 75$ i $S_2 = 90$.

Rješenje. Oznake: S_t, M, C_t



(a) Vrijedi $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{7}{9}$. Iz binarnog stabla slijedi da je:

$$\mathbf{P}^*(C = 0) = \mathbf{P}^*(\{(a, a, a)\}) + \mathbf{P}^*(\{(a, a, b)\}) + \mathbf{P}^*(\{(a, b, a)\}) = (1-p^*)^3 + (1-p^*)^2 p^* + (1-p^*)^2 p^* = \frac{64}{729}.$$

(b) Cijenu u svakom vrhu odredimo preko formule $C_t = \frac{1}{1+r}(C_{t+1}^{\uparrow} \cdot p^* + C_{t+1}^{\downarrow} \cdot (1 - p^*))$.

(c) Tražena replicirajuća strategija je: $\phi_1 = (197.5298, 1.0158)$, $\phi_2 = (-136.3494, 2.933)$, $\phi_3 = (-175.3068, 3.4568)$.