FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 10. veljače 2021.

Zadatak 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ i neka je $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajni proces.

(a) (3 boda) Definirajte Snellov omotač $U = (U_t : 0 \leq t \leq T)$ procesa Z i optimalno vrijeme zaustavljanja τ za proces Z.

(b) (5 bodova) Dokažite da je zaustavljeni proces U^τ martingal, gdje su U i τ iz (a) dijela.

(c) (4 boda) Dokažite da je vrijeme zaustavljanja $\tau_{\max}$ za Z optimalno.

Rješenje.

(a) Snellov omotač je slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ za koji je

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T\,, \\ U_t &= \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) \quad 0 \leq t \leq T-1\,. \end{aligned}$$

Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno za slučajni proces $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ ako vrijedi

$$\mathbb{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0]\,.$$

(b) Uočimo da je

$$\mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = U_0 \geq \mathbb{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]\,,$$

gdje nejednakosti vrijede zbog toga što je U supermartingal. Budući da su lijeva i desna strana gore jednake, imamo jednakost

$$\mathbb{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0]\,.$$

Budući da je $U_t^\tau \geq \mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$ (zbog U^τ supermartingal), iz gornje jednakosti uvjetnih očekivanja ta dva izraza slijedi $U_t^\tau = \mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$. Međutim, to znači da je U^τ martingal.

(c) Uočimo da vrijedi $A_t = 0$ za sve $t \leq \tau_{\max}$. Zato iz $U_t = M_t - A_t$ za sve t slijedi $U^{\tau_{\max}} = M^{\tau_{\max}}$. Budući da je M martingal, to je i $M^{\tau_{\max}}$ martingal, pa je $U^{\tau_{\max}}$ također martingal. Stoga je po karakterizaciji optimalnih vremena zaustavljanja dovoljno pokazati da je $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} U_{\tau_{\max}} &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} U_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} U_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T\,. \end{aligned}$$

Primijetimo da na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$ vrijedi $A_t = 0$ i $A_{t+1} > 0$. Stoga je na tom događaju $U_t = M_t - A_t = M_t$, te nadalje,

$$\mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_{t+1} - A_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t - A_{t+1} < M_t = U_t\,.$$

Zbog gornje nejednakosti i definicije $U_t = \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])$, slijedi da je $U_t = Z_t$ na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$. Dakle

$$U_{\tau_{\max}} = \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} Z_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T = Z_{\tau_{\max}}\,.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 10. veljače 2021.

Zadatak 2. Promatramo model potpunog financijskog tržišta bez arbitraže.

(a) (3 boda) Definirajte američki slučajni zahtjev $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ i njegovu vrijednost $U = (U_t : 0 \leq t \leq T)$.

(b) (5 bodova) Neka su Z i U procesi iz (a) dijela te neka je C_t vrijednost u trenutku t europskog slučajnog zahtjeva za kojeg vrijedi $C_t \geq Z_t$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$ i $C_T = Z_T$. Dokažite da je tada $C_t = U_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$.

(c) (4 boda) Korištenjem rezultata iz (b) usporedite vrijednost američke call, odnosno put, opcije na rizičnu imovinu s cijenom izvršenja K i danom dospijeća T s europskom call, odnosno put, opcijom s istom cijenom izvršenja i istim danom dospijeća.

Rješenje.

(a) Američki slučajni zahtjev je adaptiran niz slučajnih varijabli $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$. Neka je $S^0 = (S_t^0 : 0 \leq t \leq T)$ cijena nerizične imovine i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je vrijednost američkog slučajnog zahtjeva jednaka

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T, \\ U_t &= \max\left\{ Z_t, S_t^0 \mathbb{E}^* \left[\frac{U_{t+1}}{S_{t+1}^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\},\ t = 0, 1, ..., T-1. \end{aligned}$$

(b) Vidi dokaz Propozicije 4.21 iz materijala s predavanja.

(c) Promotrimo prvo američku call opciju na prvu financijsku imovinu sa cijenom izvršenja K. Tada je $Z_t = (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Neka je C_t vrijednost u trenutku t europske call opcije $(S_T^1 - K)^+$, te neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije. Vrijedi

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_t &= (1+r)^{-T} \mathbb{E}^*[(S_T^1 - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^*[(\widetilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T})^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &\geq \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= \widetilde{S}_t^1 - K(1+r)^{-T}. \end{aligned}$$

Pomnožimo obje strane s $S_t^0 = (1+r)^t$. Slijedi

$$C_t \geq S_t^1 - K(1+r)^{-T+t} \geq S_t^1 - K$$

uz strogu nejednakost za $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Zbog $C_t \geq 0$, dobivamo $C_t \geq (S_t^1 - K)^+ = Z_t$. Iz (b) dijela zadatka slijedi da je $C_t = U_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Dakle, američka call opcija vrijedi jednako kao i europska call opcija.

Isti račun za put opciju $Z_t := (K - S_t^1)^+$ daje

$$P_t \geq K(1+r)^{-T+t} - S_t^1$$

i ne možemo zaključiti $P_t \geq K - S_t^1$. Općenito, američka put opcija vrijedi više od europske put opcije.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 10. veljače 2021.

Zadatak 3.

(a) (5 bodova) Neka su X_1, X_2, X_3 nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.d. je $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{3}$ i $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$, te neka je $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq 3)$ slučajni proces definiran s

$$Z_0 = 0,\ \ Z_t = (1 + Z_{t-1})X_t,\ \ t = 1, 2, 3.$$

Odredite optimalno vrijeme zaustavljanja $\tau \in \mathcal{T}_{0,3}$ za proces Z (obzirom na prirodnu filtraciju za proces Z) te $\mathbb{E}[Z_\tau]$.

(b) Nalazimo se u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu s cijenom dionice $S = (S_t : 0 \leq t \leq T)$.

(b1) (4 boda) Napišite formulu za funkciju $p_{\mathrm{am}}(t, x)$ i skicirajte graf funkcije $x \mapsto p_{\mathrm{am}}(0, x)$.

(b2) (4 boda) Pokažite da vrijednost P_t američke put opcije u trenutku t zadovoljava $P_t = p_{\mathrm{am}}(t, S_t)$. Pomoćne rezultate samo iskažite.

Rješenje.

(a) Označimo s $\{\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ prirodnu filtraciju za Z, te uočimo da je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. U donjem računu ćemo više puta koristiti da je Z_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla, a X_t nezavisna obzirom na $\mathcal{F}_{t-1}$. Odredimo Snellov omotač za proces Z:

$$\begin{aligned}
U_3 &= Z_3 \\
U_2 &= \max\{Z_2, \mathbb{E}[Z_3|\mathcal{F}_2]\} = \max\{Z_2, (1 + Z_2)\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]\} = \max\{Z_2, (1 + Z_2)\mathbb{E}[X_3]\} \\
&= \max\{Z_2, \tfrac{2}{3}(1 + Z_2)\} = \tfrac{2}{3}(1 + Z_2) \\
U_1 &= \max\{Z_1, \mathbb{E}[U_2|\mathcal{F}_1]\} = \max\{Z_1, \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}(1 + Z_1)\mathbb{E}[X_2|\mathcal{F}_1]\} = \max\{Z_1, \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}(1 + Z_1)\mathbb{E}[X_3]\} \\
&= \max\{Z_1, \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{9}(1 + Z_1)\} = \max\{Z_1, \tfrac{10}{9} + \tfrac{4}{9}Z_1)\} = \tfrac{10}{9} + \tfrac{4}{9}Z_1 \\
U_0 &= \max\{Z_0, \mathbb{E}[U_1|\mathcal{F}_0]\} = \max\{0, \mathbb{E}[\tfrac{10}{9} + \tfrac{4}{9}Z_1]\} = \tfrac{10}{9} + \tfrac{4}{9}\mathbb{E}[X_1] = \tfrac{38}{27}.
\end{aligned}$$

Optimalno vrijeme zaustavljanja jednako je

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in \{X_1 = 1,\ X_2 = 1\} \\ 3, & \text{inače} \end{cases}.$$

Slijedi $\mathbb{E}[Z_\tau] = U_0 = \frac{38}{27}$.

(b1) Vrijedi

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{am}}(T, x) &= (K - x)^+, \\
p_{\mathrm{am}}(t, x) &= \max\left((K - x)^+, \frac{f(t+1, x)}{1 + r}\right), \quad 0 \leq t < T,
\end{aligned}$$

gdje je $f : \{0, 1, \ldots, T\} \times \to$ funkcija definirana formulom

$$f(t, x) := (1 - p^*)p_{\mathrm{am}}(t, x(1 + a)) + p^* p_{\mathrm{am}}(t, x(1 + b)).$$

(b2) Vidi dokaz Propozicije 4.23 iz materijala s predavanja.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 10. veljače 2021.

Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.25$, $b = 0.25$ (relativne promjene cijena dionice), te $r = 0.1$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu). Početna cijena dionice je $S_0 = 100$ kn. Promatramo američku put opciju $Z_t = (K - S_t)_+$ s danom dospijeća $T = 2$ i cijenom izvršenja $K = 95$ kn.

(a) (2 boda) U svakom čvoru binarnog stabla odredite unutarnju vrijednost Z te američke put opcije.

(b) (5 bodova) U svakom čvoru binarnog stabla odredite vrijednost (nearbitražnu cijenu) američke put opcije.

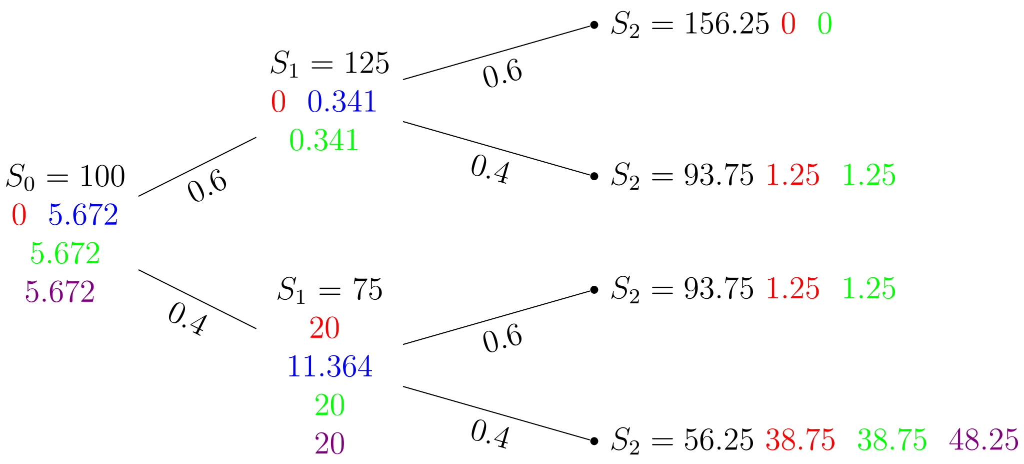
(c) (3 boda) Odredite vrijeme zaustavljanja τ u kojem je optimalno iskoristiti danu američku put opciju. Odredite razdiobu slučajne varijable S_τ (obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru na tržištu).

(d) (3 boda) Cijena dionice pada dva puta za redom i kupac opcije odluči opciju iskoristiti u tom trenutku. Izračunajte profit pisca opcije ako slijedi hedging portfelj.

Rješenje. Na tržištu postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera i vrijedi $p^* = \mathbb{P}(X_t = 0.25) = \frac{r-a}{b-a} = 0.7$, gdje je X_t prirast cijene dionice u trenutku t.

(a) Unutarnja vrijednost opcije je $Z_t = (K - S_t)_+$.

(b) Vrijednost put opcije je $U_t = \max\{Z_t, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}$, $t = 0, 1$, odnosno $U_2 = Z_2$.



(c) Jedno optimalno vrijeme zaustavljanja je $\tau = \inf\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$. Prema tome vidimo da je $\tau = 2$ na događaju $\{bb, ba\}$ i $\tau = 1$ na događaju $\{ab, aa\}$. Tada je

$$S_\tau \overset{\mathbb{P}^*}{\sim} \begin{pmatrix} 75 & 93.75 & 156.25 \\ 0.3 & 0.21 & 0.49 \end{pmatrix}.$$

(d) Nalazimo se čvoru $S_1 = 480$. Odredimo prvo proces $(1+r)^t \widetilde{M}_t$, gdje je $\widetilde{M}$ martingal iz Doobove dekompozicije supermartingala $\widetilde{U}$, tj. $M_0 = U_0$ i $M_1 = (1+r)M_0 + U_1 - \mathbb{E}^*[U_1|\mathcal{F}_0]$. Hedging portfelj ϕ je replicirajući portfelj za proces M, stoga je $V_2(\phi) = M_2$. Unutarnja vrijednost opcije jednaka je 38.75, a hedging portfelja 48.25. Profit je stoga 9.5.