FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 25. studenog 2020.

Zadatak 1. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, K elementarih događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$ i $d \in \mathbb{N}$ rizičnih financijskih imovina. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu jednaka je $r > 0$.

(a) (2 boda) Definirajte arbitražu i ekvivalentnu martingalnu mjeru.

(b) (2 boda) Iskažite fundamentalni teorem o nepostojanju arbitraže.

(c) (6 bodova) Dokažite teorem pod (b).

(d) Neka je $K = 3$, $d = 2$ i $r = 0.1$, te neka se rizična imovina modelira na sljedeći način:

$$S_0^1 = 100,\ S_1^1(\omega_1) = 200,\ S_1^1(\omega_2) = 150,\ S_1^1(\omega_3) = 50$$
$$S_0^2 = 100,\ S_1^2(\omega_1) = 50,\ S_1^2(\omega_2) = 50,\ S_1^2(\omega_3) = 200.$$

(d1) (4 boda) Odredite jedan portfelj koji je arbitraža.

(d2) (3 boda) Je li slučajni zahtjev $C = (S_1^1 - S_1^2)_+$ dostižan? Svoju tvrdnju obrazložite.

Rješenje.

(a) Definicija 2.2 i Definicija 2.5.

(b) Teorem 2.6.

(c) Teorem 2.6.

(d) Lako se pokaže da je $\mathcal{P} = \emptyset$ pa znamo da arbitraža postoji i da tržište nije potpuno.

(d1) Odredimo portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \phi^2)$ takav da je

$$\begin{aligned} V_0(\phi) &= \phi^0 + 100\phi^1 + 100\phi^2 = 0 \\ V_1(\phi)(\omega_1) &= 1.1\phi^0 + 200\phi^1 + 50\phi^2 \geq 0 \\ V_1(\phi)(\omega_2) &= 1.1\phi^0 + 150\phi^1 + 50\phi^2 \geq 0 \\ V_1(\phi)(\omega_3) &= 1.1\phi^0 + 50\phi^1 + 200\phi^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pri čemu je bar jedna od nejednakosti stroga. Uvrštavanjem $\phi^0 = -100\phi^1 - 100\phi^2$ u gornje nejednakosti i kraćenjem dobivamo

$$\begin{aligned} V_1(\phi)(\omega_1) &= 3\phi^1 - 2\phi^2 \geq 0 \\ V_1(\phi)(\omega_2) &= 2\phi^1 - 3\phi^2 \geq 0 \\ V_1(\phi)(\omega_3) &= -2\phi^1 + 3\phi^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Iz druge i treće nejednadžbe slijedi da je nužno $\phi^1 = \frac{3}{2}\phi^2$, pa iz prve dobivamo da je $\phi^2 > 0$ (jer prva nejednakost tada mora biti stroga). Slijedi da je svaki portfelj oblika $\phi = (-250x, \frac{3}{2}x, x)$, $x > 0$, arbitraža.

(d2) Pokazat ćemo da je slučajni zahtjev $C = (S_1^1 - S_1^2)_+$ dostižan i to tako da nađemo pripadni replicirajući portfelj, odnosno $\phi = (\phi^0, \phi^1, \phi^2)$ takav da je

$$\begin{aligned} V_1(\phi)(\omega_1) &= 1.1\phi^0 + 200\phi^1 + 50\phi^2 = 150 = C(\omega_1) \\ V_1(\phi)(\omega_2) &= 1.1\phi^0 + 150\phi^1 + 50\phi^2 = 100 = C(\omega_2) \\ V_1(\phi)(\omega_3) &= 1.1\phi^0 + 50\phi^1 + 200\phi^2 = 0 = C(\omega_3). \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo replicirajući portfelj $\phi = (-\frac{50}{1.1}, 1, 0)$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 25. studenog 2020.

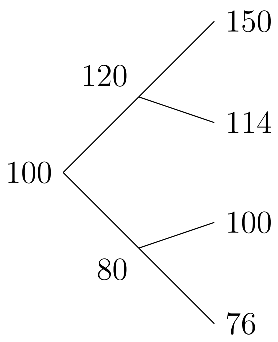
Zadatak 2. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenucima trgovanja $t = 0, 1, \dots, T$.

(a) (3 boda) Definirajte samofinancirajući portfelj, dopustivi portfelj i dostižan slučajni zahtjev.

(b) (3 boda) Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu i neka je C slučajni zahtjev takav da je $C = V_T(\phi)$ za neku samofinancirajuću strategiju. Pokažite da je C dostižan.

(c) (2 boda) Iskažite fundamentalni teorem koji daje karakterizaciju potpunih modela financijskih tržišta.

(d) (5 bodova) Dan je dvoperiodni model financijskog tržišta s jednom rizičnom i jednom nerizičnom financijskom imovinom. Nerizična imovina se ukamaćuje po stopi $r = 0.1$ dok se rizična imovina modelira na sljedeći način:



Pokažite da je ovo tržište bez arbitraže i potpuno.

Rješenje.

(a) Definicije 3.5, 3.9 i 3.25.

(b) Napomena 3.26.

(c) Teorem 3.28.

(d) Pokazat ćemo da na tržištu postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Uočimo da model možemo opisati s 4 elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$[1] i označimo cijenu rizične imovine u trenutku t s S_t. Tada je mjera $\mathbb{P}^*$ martingalna ako za $t = 0, 1$ vrijedi

$$\mathbb{E}^*[S_{t+1} | \mathcal{F}_t] = (1 + r) S_t.$$

Označimo $p_i^* = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$. Uočimo da je $\mathcal{F}_1 = \sigma\left(\{\{S_1 = 120\}, \{S_1 = 80\}\}\right) = \sigma\left(\{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}\right)$. Iz definicije martingalne mjere sada dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^*[S_1 | \mathcal{F}_0] = (1 + r) S_0 \;\Leftrightarrow\; 120(p_1^* + p_2^*) + 80(p_3^* + p_4^*) = 110 \\
&\mathbb{E}^*[S_2 | \{\omega_1, \omega_2\}] = (1 + r) S_1(\omega_1) \;\Leftrightarrow\; \frac{150 p_1^*}{p_1^* + p_2^*} + \frac{114 p_2^*}{p_1^* + p_2^*} = 132 \\
&\mathbb{E}^*[S_2 | \{\omega_3, \omega_4\}] = (1 + r) S_1(\omega_3) \;\Leftrightarrow\; \frac{100 p_3^*}{p_3^* + p_4^*} + \frac{76 p_4^*}{p_3^* + p_4^*} = 88 \\
&p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1.
\end{aligned}$$

[1] Događaje ω_i označit ćemo redom od najviše do najniže grane stabla, npr. $\omega_1 = \{S_1 = 120, S_2 = 150\}$.

Sređivanjem gornjih izraza dobivamo sustav

$$
\begin{aligned}
&12p_1^* + 12p_2^* + 8p_3^* + 8p_4^* = 11\\
&p_1^* - p_2^* = 0\\
&p_3^* - p_4^* = 0\\
&p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1,
\end{aligned}
$$

koji ima jedinstveno rješenje $p_1^* = p_2^* = \frac{3}{8}$, $p_3^* = p_4^* = \frac{1}{8}$. Kako su $p_i^* > 0$, $i =, \dots, 4$, pokazali smo da postoji ekvivalentna martingalna mjera na tržištu, pa ono ne dopušta arbitražu. Kako je EMM ujedno i jedinstvena, model tržišta je i potpun.

Alternativno, može se provesti konstrukcija kao u CRR modelu, gdje se pokaže da je vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*(\omega) = \mathbb{P}_1^*(\omega_1)\mathbb{P}_2^*(\omega_2)$, $\omega \in \Omega := \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{0.2, -0.2\}, \omega_2 \in \{0.25, -0.05\}\}$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera, pri čemu je

$$\mathbb{P}_1^*(0.2) = \frac{3}{4},\ \mathbb{P}_1^*(0.2) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}_1^*(0.25) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}_1^*(-0.05) = \frac{1}{2}.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 25. studenog 2020.

Zadatak 3. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a < b$ (relativne promjene cijena dionice), $r \in (a, b)$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T \in \mathbf{N}$. Neka je $S = (S_t : t \in \{0, \ldots, T\})$ proces cijena dionice na tom tržištu.

(a) (4 boda) Dokažite da gornji model ne dopušta arbitražu.

(b) (4 boda) Neka je $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$ i $x > 0$. Odredite razdiobu, obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru, slučajne varijable S_T uvjetno na događaj $\{S_t = x\}$. Svoje tvrdnje obrazložite.

Rješenje.

(a) Obrat Leme 3.31 iznad Propozicije 3.32.

(b) Skica rješenja: Analogno kao u dokazu Propozicije 3.33, korištenjem $\mathcal{F}_t$-izmjerivosti, nezavisnosti i jednake distribuiranosti prirasta $X_{t+1}, \ldots, X_T$ (obzirom na EMM) slijedi da je

$$S_T = x(1+a)^{T-t-Z}(1+b)^Z \quad \text{na događaju } \{S_t = x\},$$

gdje je $Z \sim B(T-t, p^*)$ nezavisna od S_t. Drugim riječima,

$$\mathbb{P}^* \left(S_T = x(1+a)^{T-t-i}(1+b)^i | S_t = x \right) = \binom{T-t}{i} p^{*i}(1-p^*)^{T-t-i}, \quad i = 0, \ldots, T-t.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE

Prvi kolokvij – 25. studenog 2020.

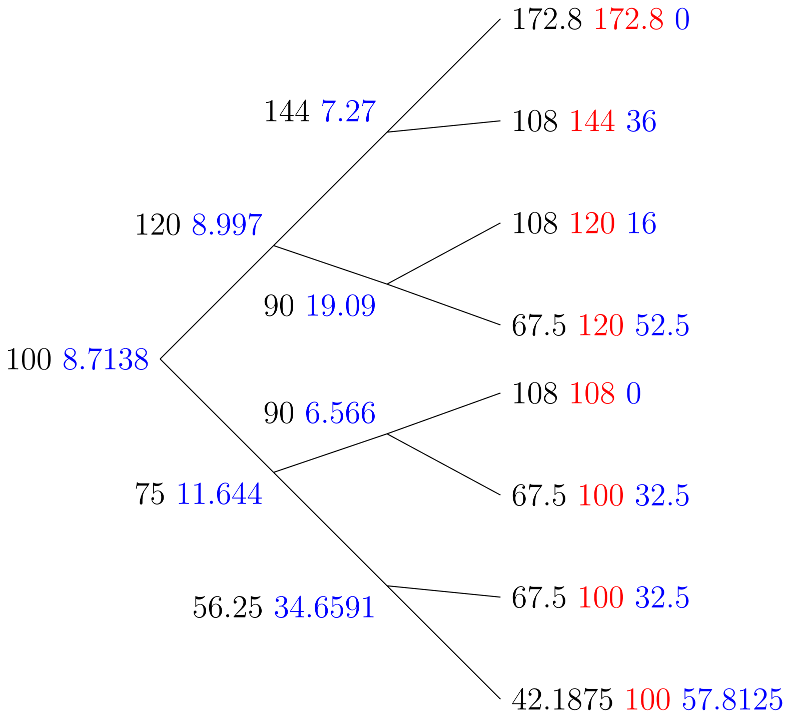
Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.25$, $b = 0.2$ (relativne promjene cijena dionice), $r = 0.1$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T = 3$. Neka je $M = \max\{S_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ najviša razina cijene dionice do trenutka T i $S_0 = 100$ kn početna cijena dionice. Promatramo *lookback put* opciju $C = M - S_T$.

(a) (3 boda) Odredite $\mathbb{P}^*(C = 0)$, gdje je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera.

(b) (6 boda) Odredite cijenu opcije C u svakom trenutku.

(c) (3 boda) Izračunajte replicirajuću strategiju ako je $S_1 = 75$ i $S_2 = 90$.

Rješenje. Oznake: S_t, M, C_t



(a) Vrijedi $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{7}{9}$. Iz binarnog stabla slijedi da je:

$$\mathbb{P}^*(C = 0) = \mathbb{P}^*(\{(b, b, b)\}) + \mathbb{P}^*(\{(a, b, b)\}) = p^{*3} + p^{*2}(1 - p^*) = \frac{49}{81}.$$

(b) Cijenu u svakom vrhu odredimo preko formule $C_t = \frac{1}{1+r}(C_{t+1}^{\uparrow} \cdot p^* + C_{t+1}^{\downarrow} \cdot (1 - p^*))$.

(c) Tražena replicirajuća strategija je: $\phi_1 = (14.5934, -0.0588)$, $\phi_2 = (67.3401, -0.8324)$, $\phi_3 = (65.1139, -0.8025)$.