FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ i neka je $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajni proces.

(a) (5 bodova) Dokažite da je Snellov omotač $U = (U_t : 0 \leq t \leq T)$ procesa Z najmanji supermartingal koji dominira proces Z.

(b) (3 boda) Definirajte najmanje optimalno vrijeme zaustavljanja za proces Z. Bez dokazivanja pomoćnih rezultata, obrazložite zašto je τ_0 uistinu najmanje optimalno vrijeme zaustavljanja za proces Z.

(c) (4 boda) Neka je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dokažite da je $U_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\tau]$, gdje je $\mathcal{T}_{0,T}$ familija svih vremena zaustavljanja za Z. Pomoćne rezultate koristite bez dokaza.

Rješenje.

(a) Kako je

$$U_t = \max\{Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\},\ t \in 0, ..., T-1 \text{ i } U_T = Z_T$$

slijedi da je $U_t \geq Z_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$, pa U dominira Z. Također, po definiciji vrijedi $U_t \geq \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T-1$ što znači da je U supermartingal. Neka je $X = (X_t : 0 \leq t \leq T)$ supermartingal koji dominira Z. Pokažimo da je $X_t \geq U_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Vrijedi $X_T \geq Z_T = U_T$. Pretpostavimo da za neki $0 \leq t < T-1$ vrijedi $X_{t+1} \geq U_{t+1}$. Tada je

$$X_t \geq \mathbb{E}[X_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \qquad \text{i} \qquad X_t \geq Z_t\,,$$

pa je $X_t \geq \max\{Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\} = U_t$.

(b) Najmanje optimalno vrijeme zaustavljanja dano je s $\tau_0 = \min\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$. Po karakterizaciji optimalnog vremena zaustavljanja τ za Z slijedi da je nužno $U_\tau = Z_\tau$, pa je nužno $\tau \geq \tau_0$.

(c) Po definiciji od τ_0 slijedi $U_{\tau_0} = Z_{\tau_0}$ te da je zaustavljeni proces U^{τ_0} martingal. Vrijedi

$$U_0 = U_0^{\tau_0} = \mathbb{E}[U_T^{\tau_0}] = \mathbb{E}[U_{\tau_0}] = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}].$$

S druge strane, budući da je U supermartingal, slijedi da je U^τ također supermartingal za svaki $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$. Prema tome,

$$U_0 \geq \mathbb{E}[U_T^\tau] = \mathbb{E}[U_\tau] \geq \mathbb{E}[Z_\tau].$$

Time je tvrdnja dokazana.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 2. Promatramo model potpunog financijskog tržišta bez arbitraže.

(a) (3 boda) Definirajte američki slučajni zahtjev $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ i njegovu vrijednost $U = (U_t : 0 \leq t \leq T)$.

(b) (3 boda) Neka su Z i U procesi iz (a) dijela te neka je C_t vrijednost u trenutku t europskog slučajnog zahtjeva za kojeg vrijedi $C_T = Z_T$. Pokažite da za sve $t = 0, 1, \ldots, T$ vrijedi $C_t \leq U_t$.

(c) (4 boda) Pretpostavimo da na tržištu imamo jednu rizičnu i jednu nerizičnu financijsku imovinu. Dokažite da je vrijednost američke call opcije na rizičnu imovinu s cijenom izvršenja K i danom dospijeća T jednaka vrijednosti europske call opcije s istom cijenom izvršenja i istim danom dospijeća.

(d) (3 boda) Dokažite da za optimalno vrijeme zaustavljanja τ za američku call opciju vrijedi ili $\tau = T$ ili $U_\tau = 0$.

Rješenje.

(a) Američki slučajni zahtjev je adaptiran niz slučajnih varijabli $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$. Neka je $S^0 = (S^0_t : 0 \leq t \leq T)$ cijena nerizične imovine i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je vrijednost američkog slučajnog zahtjeva jednaka

$$U_T = Z_T,$$
$$U_t = \max\left\{Z_t, S^0_t \mathbb{E}^*\left[\frac{U_{t+1}}{S^0_{t+1}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\},\ t = 0, 1, ..., T-1.$$

(b) Diskontirani proces $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t : 0 \leq t \leq T)$ je $\mathbb{P}^*$-supermartingal, pa vrijedi

$$\widetilde{U}_t \geq \mathbb{E}^*[\widetilde{U}_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\widetilde{C}_T \mid \mathcal{F}_t] = \widetilde{C}_t\,,$$

pa je $U_t \geq C_t$.

(c) Pokažimo da vrijedi $C_t \geq Z_t = (S_t - K)_+$ za svaki t, gdje S_t označava cijenu rizične financijske imovine. Vrijedi

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_t &= (1+r)^{-T}\mathbb{E}^*[(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[(\widetilde{S}_T - K(1+r)^{-T})_+ \mid \mathcal{F}_t] \\ &\geq \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_T - K(1+r)^{-T} \mid \mathcal{F}_t] = \widetilde{S}_t - K(1+r)^{-T}\,.\end{aligned}$$

Množenjem obe strane s $(1+r)^t$ slijedi

$$C_t \geq S_t - K(1+r)^{-T+t} \geq S_t - K$$

uz strogu nejednakost za $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Zbog $C_t \geq 0$, dobivamo $C_t \geq (S_t - K)_+ = Z_t$, pa proces $\tilde{C}$ dominira $\tilde{Z}$. Dodatno, proces $\tilde{C}$ je $\mathbb{P}^*$- martingal, pa je i $\mathbb{P}^*$-supermartingal. Kako je $\tilde{U}$ Snellov omotač niza $\tilde{Z}$, dakle najmanji $\mathbb{P}^*$-supermartingal koji dominira $\tilde{Z}$, nužno je $\tilde{U} \leq \tilde{C}$. Tvrdnja sada slijedi iz (b) dijela zadatka.

(d) Iz (c) dijela slijedi da je proces $\widetilde{U}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Tada je proces $\widetilde{A}$ iz Doobove dekompozicije procesa $\widetilde{U}$ jednak 0 u svakom trenutku t. Iz toga slijedi da je najveće optimalno vrijeme za iskoristiti opciju upravo T, tj. $\tau_{max} = T$. Pretpostavimo da je $\tau \leq T-1$ sada neko drugo optimalno vrijeme zaustavljanja. Iz teorema o karakterizaciji optimalnih vremena zaustavljanja slijedi da je

$$C_\tau = U_\tau = Z_\tau = (S_\tau - K)_+.$$

Kako je po računu iz (c) dijela $C_t > S_t - K$ za $t \leq T-1$ slijedi $C_\tau > S_\tau - K$, što je moguće samo kad je $S_\tau - K < 0$. Slijedi da je tada nužno $U_\tau = C_\tau = (S_\tau - K)_+ = 0$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 3.

(a) (5 bodova) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X = (X_t : 0 \leq t \leq T)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$,

$$X_0 = 0,\ \mathbb{P}(X_t = X_{t-1} + 1) = \mathbb{P}(X_t = X_{t-1} - 1) = \frac{1}{2},\ t \geq 1.$$

Neka je proces $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ definiran s $Z_t = tX_t + t$. Odredite optimalno vrijeme zaustavljanja $\tau \in \mathcal{T}_{0,3}$ za proces Z te $\mathbb{E}[Z_\tau]$.

(b) Nalazimo se u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu s cijenom dionice $S = (S_t : 0 \leq t \leq T)$. Vrijednost P_t američke put opcije u trenutku t dana je formulom $P_t = p_{am}(t, S_t)$ za neku funkciju $p_{am} : \{0, 1, ..., T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b1) (3 boda) Napišite formulu za hedging strategiju $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : 1 \leq t \leq T)$ za američku put opciju.

(b2) (4 boda) Za koje početne vrijednosti dionice S_0 je optimalno iskoristiti američku put opciju odmah u $t = 0$? Svoju tvrdnju detaljno obrazložite. Skicirajte graf funkcije $x \mapsto p_{am}(0, x)$.

Rješenje.

(a) Odredimo Snellov omotač za proces Z:

$$\begin{aligned}
U_3 &= u(3, X_3) = Z_3 = f(3, X_3) = 3X_3 + 3 \\
U_2 &= u(2, X_2) = \max\{Z_2, Pu(3, X_2)\} = \max\{2X_2 + 2, \tfrac{1}{2}(u(3, X_2 - 1) + u(3, X_2 + 1))\} \\
&= \max\{2X_2 + 2, \tfrac{1}{2}(3(X_2 - 1) + 3 + 3(X_2 + 1) + 3)\} = \max\{2X_2 + 2, 3X_2 + 3\} \\
&= \begin{cases} -2, & X_2 = -2 \\ 3X_2 + 3, & \text{inače} \end{cases} \\
U_1 &= u(1, X_1) = \max\{Z_1, Pu(2, X_1)\} = \max\{X_1 + 1, \tfrac{1}{2}(u(2, X_1 - 1) + u(2, X_1 + 1))\} \\
&= \begin{cases} \max\{0, \tfrac{1}{2}(u(2, -2) + u(2, 0))\}, & X_1 = -1 \\ \max\{2, \tfrac{1}{2}(u(2, 0) + u(2, 2))\}, & X_1 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \tfrac{1}{2}, & X_1 = -1 \\ 6, & X_1 = 1 \end{cases} \\
U_0 &= \max\{Z_0, Pu(1, 0)\} = \max\{0, \tfrac{1}{2}(u(1, -1) + u(1, 1))\} = \tfrac{13}{4}
\end{aligned}$$

Optimalno vrijeme zaustavljanja jednako je

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in \{X_2 = -2\} \\ 3, & \text{inače} \end{cases}.$$

Slijedi $\mathbb{E}[Z_\tau] = U_0 = \frac{13}{4}$.

(b1) Za $t = 0, \ldots, T - 1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\phi_{t+1}^1 &= \Delta(t + 1, S_t) = \frac{p_{am}(t + 1, S_t(1 + b)) - p_{am}(t + 1, S_t(1 + a))}{S_t(b - a)}, \\
\phi_{t+1}^0 &= (1 + r)^{-t}[M_t - \phi_{t+1}^1 S_t],
\end{aligned}$$

gdje je $\widetilde{M}$ martingal iz Doobove dekompozicije diskontirane vrijednosti američke put opcije $\widetilde{U}$.

(b2) Da bi optimalno vrijeme zaustavljanja za američku put opciju bilo 0 nužno je i dovoljno da vrijedi $p_{am}(0, S_0) = U_0 = Z_0 = (K - S_0)_+$. Stoga je američku put opciju optimalno iskoristiti u trenutku $t = 0$ ako i samo ako je $S_t \in [0, x^*]$ gdje je $x^* = \sup\{x \in [0, (1+a)^{-T}K) : p_{am}(0, x) = (K - x)_+\}$. Uočimo da je zbog konveksnosti tada $p_{am}(0, x^*) = (K - x^*)_+$. Također uočimo da je $x^* \in [0, K]$ jer za $x \in (K, (1+a)^{-T}K)$ vrijedi $p_{am}(0, x) > 0 = (K - x)_+$. Za skicu grafa vidi predavanja.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.04$, $b = 0.06$ (relativne promjene cijena dionice), te $r = 0.02$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu). Početna cijena dionice je $S_0 = 500$ kn. Promatramo američku put opciju $Z_t = (K - S_t)_+$ s danom dospijeća $T = 2$ i cijenom izvršenja $K = 490$ kn.

(a) (2 boda) U svakom čvoru binarnog stabla odredite unutarnju vrijednost Z te američke put opcije.

(b) (5 bodova) U svakom čvoru binarnog stabla odredite vrijednost (nearbitražnu cijenu) američke put opcije.

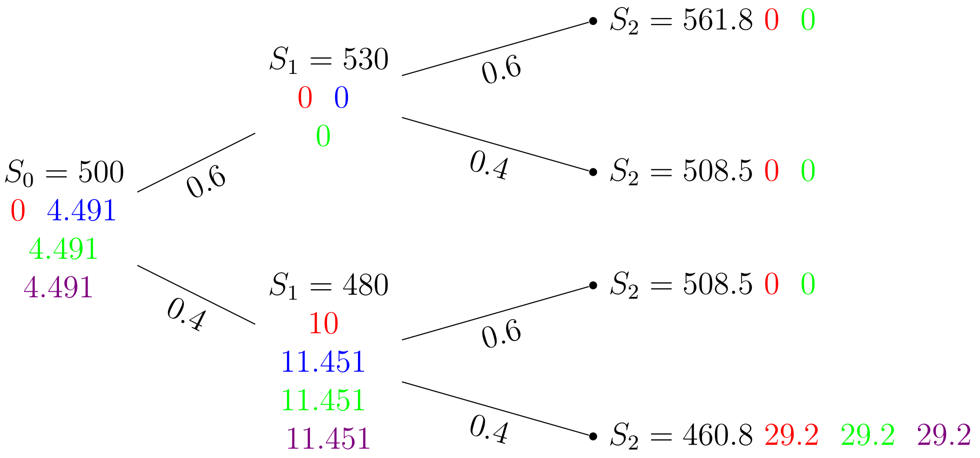
(c) (3 boda) Odredite vrijeme zaustavljanja τ u kojem je optimalno iskoristiti danu američku put opciju. Dokažite za je τ optimalno vrijeme tako da pokažete da je $\mathbb{E}^*[(1+r)^{-\tau} Z_\tau] = U_0$ ($\mathbb{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera na tržištu).

(d) (3 boda) Cijena dionice pada u trenutku $t = 1$ i kupac opcije odlučio je opciju iskoristiti u tom trenutku. Izračunajte profit pisca opcije ako slijedi hedging portfelj.

Rješenje. Na tržištu postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera i vrijedi $p^* = \mathbb{P}(X_t = 0.06) = \frac{r-a}{b-a} = 0.6$, gdje je X_t prirast cijene dionice u trenutku t.

(a) Unutarnja vrijednost opcije je $Z_t = (K - S_t)_+$.

(b) Vrijednost put opcije je $U_t = \max\{Z_t, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}$, $t = 0, 1$, odnosno $U_3 = Z_3$.



(c) Jedno optimalno vrijeme zaustavljanja je $\tau = \inf\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$. Prema tome vidimo da je $\tau = 2$ na događaju $\{S_1 = 480\}$ i $\tau = 1$ na događaju $\{S_1 = 530\}$. Kako je $Z_1 = Z_2 = 0$ na događaju $\{S_1 = 530\}$, alternativno možemo uzeti $\tau = 2$ i na događaju $\{S_1 = 530\}$. Tada je

$$Z_\tau \overset{\mathbb{P}^*}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 29.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

i vrijedi $\mathbb{E}^*[\frac{1}{(1+r)^\tau} Z_\tau] = 4.491 = U_0$.

(d) Nalazimo se čvoru $S_1 = 480$. Odredimo prvo proces $(1+r)^t \widetilde{M}_t$, gdje je $\widetilde{M}$ martingal iz Doobove dekompozicije supermartingala $\widetilde{U}$, tj. $M_0 = U_0$ i $M_1 = (1+r)M_0 + U_1 - \mathbb{E}^*[U_1|\mathcal{F}_0]$. Hedging portfelj ϕ je replicirajući portfelj za proces M, stoga je $V_1(\phi) = M_1$. Unutarnja vrijednost opcije jednaka je 10, a hedging portfelja 11.451. Profit je stoga 1.451.